

Kategorientheorie

Skript geschrieben von Samuel Adrian Antz,
veröffentlicht und frei verfügbar auf:
samueladrianantz.net/de/skripte/kattheo

27. September 2023

Über die Kategorientheorie

Die *Kategorientheorie* (oder *Kategorielle Algebra*) entstand historisch aus der *Algebraischen Topologie* und verallgemeinert die Methoden unzähliger weiterer Gebiete der Mathematik. Die Klassen der mathematischen Strukturen (etwa Gruppen oder topologische Räume) und strukturerhaltenden Verbindungen (etwa Gruppenhomomorphismen oder stetige Abbildungen) dazwischen, die in diesen Gebieten jeweils untersucht werden, werden in der Kategorientheorie selbst als mathematische Struktur zusammengefasst, welche *Kategorie* genannt wird.

Die Kunst der Kategorientheorie besteht darin, mathematische Strukturen (genannt Objekte) alleine und vollständig durch die strukturerhaltenden Verbindungen (genannt Morphismen) zu anderen zu verstehen. Aufgrund dieser indirekten Betrachtung und des hohen Maßes an Allgemeinheit sind die Methoden der Kategorien zwar überall in der Mathematik anwendbar, aber entsprechend äußerst abstrakt. Die Kategorientheorie wird daher auch als „abstrakter Unsinn“ oder „allgemeiner Unsinn“ bezeichnet.

Inhaltsverzeichnis

I	Kategorielle Grundlagen	7
1	Kategorien	8
1.1	Einordnung von Kategorien	9
1.2	Teil-, Produkt- und duale Kategorien	10
1.3	Domänen und Kodomänen	11
2	Initiale und terminale Objekte	12
2.1	Initiale Objekte	12
2.2	Terminale Objekte	13
2.3	Nullobjekte	13
3	Spezielle Morphismen	15
3.1	Isomorphismen	15
3.2	Monomorphismen	16
3.3	Epimorphismen	17
3.4	Extremale Morphismen	18
3.5	Schnitte	19
3.6	Retraktionen	20
4	Generatoren und Kogeneratoren	23
4.1	Generatoren	23
4.2	Kogeneratoren	24
5	Injektive und projektive Objekte	25
5.1	Injektive Objekte	25
5.2	Projektive Objekte	26
6	Lokalität	27
6.1	Lokale Objekte	27
6.2	Lokale Morphismen	27
7	(Ko)zusammenhängende Objekte	29
7.1	Lokal zusammenhängende Objekte und Kategorien	30
8	(Ko)kompakte Objekte	31

II	Kategorielle Konstruktionen	32
9	Scheiben- und Koscheibenkategorien	33
9.1	Paarung in Scheibenkategorien	36
9.2	Doppelscheibenkategorien	37
10	Klassen und Kategorien der Elemente	38
11	Globaler Schnittfunktor	40
12	Kommakategorien	41
12.1	Pfeilkategorien	41
12.2	Kategorie der Objekte unter X	42
12.3	Kategorie der Objekte über X	42
13	Produkte und Koprodukte	43
13.1	Produkte von Objekten	43
13.2	Produkte von Morphismen	46
13.3	Koprodukte von Objekten	47
13.4	Koprodukte von Morphismen	50
13.5	Biprodukte	51
14	Faser- und Kofaserprodukte	53
14.1	Faserprodukte	53
14.2	Kofaserprodukte	58
14.3	Faserprodukt-Exponent	63
14.4	Kofaserprodukt-Produkt	63
15	Exponentialobjekte	64
16	Kerne und Kokerne	67
16.1	Kerne	67
16.2	Kokerne	68
16.3	Normale Morphismen	70
17	Differenzkerne und -kokerne	71
17.1	Differenzkerne	71
17.2	Differenzkokerne	73
17.3	Reguläre Monomorphismen	75
17.4	Reguläre Epimorphismen	75
17.5	Fix- und Kofixobjekte	76
18	Bilder und Kobilder	78
18.1	Bilder	78
18.2	Kobilder	78
19	Diagramme	80
19.1	Kegel	80
19.2	Kokegel	81

20 Limiten und Kolimiten	82
20.1 Limiten	82
20.2 Kolimiten	83
20.3 Filtriertheit und Vollständigkeit	86
21 Funktoren	87
21.1 Duale Funktoren	89
21.2 Volltreue Funktoren und Einbettungen	89
21.3 Subfunktoren	90
22 Funktoralgebren und -koalgebren	91
23 Externer Hom-Funktor	92
24 Funktorkategorie	94
25 Natürliche Transformationen	96
25.1 Vertikale und horizontale Verkettung	96
25.2 Induzierte natürliche Transformationen	97
25.3 Natürliche Isomorphismen	98
25.4 Interner Hom-Funktor	98
26 Ende und Koende	99
26.1 Ende	99
26.2 Koende	100
27 Profunktoren	103
27.1 Graphen und Kographen	103
28 $\dagger$-Kategorien und -Funktoren	104
29 C^*-Kategorien	105
30 Kernkategorien	106
30.1 Homotopieinvariante Funktoren	107
31 ????	108
31.1 Lawverescher Fixpunktsatz	108
III Kategorielle Verbindungen	110
32 Kategorienisomorphie und -äquivalenz	111
33 Morita-Äquivalenz	112
34 Isbell-Dualität	113
35 Konkretisierbare Kategorie	114
35.1 Freie Objekte	114

IV	Kategorielle Garbentheorie	116
36	Prägarben und Koprägarben	117
37	Adjungierte Funktoren	120
37.1	Einheiten und Koeinheiten	121
37.2	Generelles Adjungierte-Funktoren-Theorem (GAFT)	122
37.3	Spezielles Adjungierte-Funktoren-Theorem (SAFT)	122
37.4	Adjunktionen auf Scheibenkategorien	122
37.5	Spezielle adjungierte Funktoren	122
38	Reflektoren und Koreflektoren	123
38.1	Reflektoren	123
38.2	Koreflektoren	124
39	Kan-Erweiterungen und -Lifte	126
39.1	Kan-Erweiterungen	126
39.2	Kan-Lifte	126
39.3	Yoneda-Erweiterung	128
40	Kategorie der Garben und Prägarben	129
40.1	Ouvert-Kategorie und -Funktork	129
41	Pfeilkategorie	130
V	Yoneda-Lemma	131
42	Yoneda-Einbettung	132
42.1	Satz von Yoneda	133
42.2	Total (distributive) Kategorien	134
43	Exakte und koexakte Sequenzen	135
VI	Kategorien mit zusätzlicher Struktur	136
44	Kartesisch abgeschlossene Kategorien	137
45	(Prä)additive und abelsche Kategorien	138
45.1	Eilenberg–Watts-Theorem	139
45.2	Einbettungssatz von Mitchell	139
46	Triangulierte Kategorien	140
47	Exakte Funktoren	141

VII	Monoidale Kategorien	143
48	Monoidale Kategorien	144
48.1	Spezielle monoidale Kategorien	146
48.2	Duale Objekte	148
49	Spuren	151
50	Monoide und Komonoide	152
50.1	Monoide	152
50.2	Komonoide	153
51	Monoidale Funktoren	155
52	Geschlossene Funktoren	157
VIII	Höhere Kategorientheorie	158
53	Angereicherte Kategorien	159
54	2-Kategorien	160
54.1	Calabi–Yau-Kategorien (CY-Kategorien)	160
54.2	?	160
IX	Anhang	162
55	Auflistung spezieller Kategorien	163
55.1	Algebraische Kategorien	163
55.1.1	Gruppentheoretische Kategorien	163
55.1.2	Ringtheoretische Kategorien	163
55.1.3	Körpertheoretische Kategorien	164
55.2	Topologische Kategorien	164
56	Auflistung von Lemmata	165

Teil I

Kategorielle Grundlagen

Kapitel 1

Kategorien

Eine Kategorie ist das grundlegende Untersuchungsobjekt der Kategorientheorie, die Definition leitet sich dabei aus den Gemeinsamkeiten vieler verschiedener Teilgebiete der Mathematik ab: In diesen werden mathematische Strukturen (Objekte), meist auf Mengen basierend, und strukturerhaltene Verbindungen (Morphismen), meist spezielle Abbildung zwischen den grundlegenden Mengen, zwischen diesen untersucht. Dabei gilt stets, dass die Identität strukturerhaltend ist sowie dass die Komposition von strukturerhaltenden Verbindungen ebenso strukturerhaltend ist. Die Definition einer Kategorie formalisiert diese Beobachtung.

Definition 1.1 (Kategorie). *Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus:*

- I.) einer Klasse $\text{Ob } \mathcal{C}$ von Objekten*
- II.) für je zwei Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ einer Klasse $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (auch $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\mathcal{C}(X, Y)$, $[X, Y]_{\mathcal{C}}$ oder $(X, Y)_{\mathcal{C}}$) von Morphismen (auch Homomorphismen), wobei $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y') = \emptyset$ für $(X, Y) \neq (X', Y')$.*
- III.) für Objekte $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ einer assoziativen Verknüpfungsabbildung:*

$$\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), (f, g) \mapsto f \circ g \quad (1.1)$$

- IV.) für ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ einem Identitätsmorphismus $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, sodass:*

$$\bigvee_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)} : f \circ \text{id}_X = f \quad (1.2)$$

$$\bigvee_{g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)} : \text{id}_X \circ g = g \quad (1.3)$$

Wichtig ist dabei, dass für Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ die Klassen $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ nicht miteinander übereinstimmen! Die Klasse aller Morphismen wird als $\text{Ar } \mathcal{C}$ (eng. arrow), seltener auch als $\text{Fl } \mathcal{C}$ (franz. flèche) oder $\text{Pf } \mathcal{C}$ (deut. Pfeil) bezeichnet, wobei:

$$\text{Ar } \mathcal{C} := \bigcup_{X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y). \quad (1.4)$$

Ein Morphismus von einem Objekt zu sich selbst wird *Endomorphismus* genannt. Die Klasse aller Endomorphismen für ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ wird als $\text{End}_{\mathcal{C}}(X) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ bezeichnet, wobei $(\text{End}_{\mathcal{C}}(X), \circ \text{id}_X)$ ein Monoid ist.

Beispiel 1.2 (Terminale Kategorie). *Eine spezielle Kategorie ist die terminale Kategorie $\mathcal{T}$ mit nur einem Objekt $T \in \text{Ob } \mathcal{T}$ und nur einem Morphismus $\text{id}_T \in \text{End}_{\mathcal{T}}(T)$.*

Beispiel 1.3. ***Set** ist die Kategorie der Mengen, deren Objekte alle Mengen und deren Morphismen alle Abbildungen zwischen Mengen sind:*

$$\text{Hom}_{\text{Set}}(X, Y) := Y^X = \{X \rightarrow Y\} \quad (1.5)$$

1.1 Einordnung von Kategorien

Definition 1.4 (Diskrete Kategorie). *Eine Kategorie $\mathcal{C}$, deren einzige Morphismen die Identitäten sind:*

$$\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}: \text{End}_{\mathcal{C}}(X) = \{\text{id}_X\} \quad (1.6)$$

$$\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}, X \neq Y: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \emptyset \quad (1.7)$$

wird diskret (oder diskrete Kategorie) genannt.

Definition 1.5 (Indiskrete Kategorie). *Eine Kategorie $\mathcal{C}$, für die von jedem Objekt zu jedem anderen nur ein Morphismus führt:*

$$\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}: |\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)| = 1 \quad (1.8)$$

wird indiskret (oder indiskrete Kategorie) genannt.

Definition 1.6 (Dünne Kategorie). *Eine Kategorie $\mathcal{C}$, für die $\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ jeweils $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ maximal ein Morphismus enthält, wird dünn (oder dünne Kategorie) genannt.*

Korollar 1.7. *Diskrete und indiskrete Kategorien sind dünn.*

Beispiel 1.8. *Die terminale Kategorie $\mathcal{T}$ ist diskret, indiskret und daher dünn nach Korollar (1.7).*

Definition 1.9 (Kleine Kategorie). *Eine Kategorie $\mathcal{C}$, für die $\text{Ar } \mathcal{C}$ eine Menge ist, wird klein (oder kleine Kategorie) genannt.*

Korollar 1.10. *Dünne Kategorien sind klein.*

Beispiel 1.11. *Die Kategorie $(\mathbb{N}, \leq)$ ist klein, aber nicht dünn.*

Definition 1.12 (Lokal kleine Kategorie). *Eine Kategorie $\mathcal{C}$, für die $\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ jeweils $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ eine Menge ist, wird lokal klein (oder lokal kleine Kategorie) genannt.*

Korollar 1.13. *Kleine Kategorien sind lokal klein.*

Beispiel 1.14. *Die Kategorien **Set**, **Grp** und **Top** sind lokal klein, aber nicht klein.*

Definition 1.15. *Für eine mengentheoretische Kategorie $\mathcal{C}$ ist:*

$$\text{Ob } \mathcal{C}_{\text{fin}} := \{X \in \text{Ob } \mathcal{C} \mid |X| < \infty\} \quad (1.9)$$

$$\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}_{\text{fin}}: \mathbb{C}_{\text{fin}}(X, Y) := \mathbb{C}(X, Y) \quad (1.10)$$

1.2 Teil-, Produkt- und duale Kategorien

Definition 1.16 (Teilkategorie). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Kategorie $\mathcal{D}$, für die $\text{Ob}(\mathcal{D})$ eine Teilklasse von $\text{Ob}\mathcal{C}$ ist und $\forall X, Y \in \text{Ob}\mathcal{D}$ jeweils $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ eine Teilmenge von $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, eine Teilkategorie von $\mathcal{C}$

Die Unterkategorie $\mathcal{D}$ wird *voll* genannt, wenn:

$$\forall X, Y \in \text{Ob}\mathcal{D}: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \quad (1.11)$$

Für eine volle Unterkategorie reicht daher die Angabe ihrer Objekte.

Definition 1.17 (Produktkategorie). Für Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist die Kategorie $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ mit:

$$\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \text{Ob}\mathcal{C} \times \text{Ob}(\mathcal{D}) \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \forall (X, Y), (X', Y') \in \text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \text{Ob}\mathcal{C} \times \text{Ob}(\mathcal{D}): \\ \text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((X, Y), (X', Y')) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X', Y') \end{aligned} \quad (1.13)$$

ihre Produktkategorie.

Definition 1.18 (Duale Kategorie). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist die Kategorie $\mathcal{C}^{\text{op}}$ mit:

$$\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) := \text{Ob}\mathcal{C} \quad (1.14)$$

$$\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}\mathcal{C}: \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \quad (1.15)$$

ihre duale Kategorie.

Der Übergang von einer Kategorie auf ihre duale Kategorie entspricht also der Umkehrung der Richtung sämtlicher Morphismen

Satz 1.19. Die duale Kategorie der dualen Kategorie ist wieder die Kategorie selbst. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist:

$$(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}. \quad (1.16)$$

Beweis. Es gilt mit Gleichung (1.14):

$$\text{Ob}((\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}\mathcal{C}. \quad (1.17)$$

Werden diese jeweils alle mit Ob bezeichnet, ist weiter:

$$\forall X, Y \in \text{Ob}: \text{Hom}_{(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(Y, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y). \quad (1.18)$$

□

Satz 1.20. Dualität vertauscht mit Produkten. Für Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist:

$$(\mathcal{C} \times \mathcal{D})^{\text{op}} = \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D}^{\text{op}}. \quad (1.19)$$

Beweis. Es gilt mit den Gleichungen (1.14) und (1.12):

$$\begin{aligned} \text{Ob}((\mathcal{C} \times \mathcal{D})^{\text{op}}) &= \text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \text{Ob}\mathcal{C} \times \text{Ob}(\mathcal{D}) \\ &= \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) \times \text{Ob}(\mathcal{D}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D}^{\text{op}}). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Werden diese jeweils alle mit Ob bezeichnet, ist weiter:

$$\begin{aligned} \forall (X, Y), (X', Y') \in \text{Ob}: \text{Hom}_{(\mathcal{C} \times \mathcal{D})^{\text{op}}}((X, Y), (X', Y')) &= \text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((X', Y'), (X, Y)) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y', Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, X') \times \text{Hom}_{\mathcal{D}^{\text{op}}}(Y, Y') \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D}^{\text{op}}}((X, Y), (X', Y')). \end{aligned} \quad (1.21)$$

□

1.3 Domänen und Kodomänen

Das Datum eines Morphismus besteht unter anderen aus den beiden Objekten, die dieser verbindet. Dies ergibt zwei Abbildungen von der Klasse der Morphismen in die Klasse der Objekte.

Definition 1.21 (Quelle und Ziel). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ sind die Abbildungen:*

$$\text{dom}: \text{Ar } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{C}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \ni f \mapsto X \quad (1.22)$$

$$\text{cod}: \text{Ar } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{C}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \ni f \mapsto Y \quad (1.23)$$

die Domäne und Kodomäne, die einem Morphismus $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ jeweils dessen Quelle (eng. domain) X und Ziel (eng. codomain) Y zuordnen.

Beispiel 1.22. Für ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ ist $\text{dom}(\text{id}_X) = X$ und $\text{cod}(\text{id}_X) = X$.

$$\text{dom}(g \circ f) = \text{dom}(f) \quad (1.24)$$

$$\text{cod}(g \circ f) = \text{cod}(g) \quad (1.25)$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{dom} & \\ & \curvearrowright & \\ \text{Ob } \mathcal{C} \times \text{Ob } \mathcal{C} & \xrightarrow{\circ} & \text{Ob } \mathcal{C} \xrightarrow{\text{id}} \text{Ar } \mathcal{C} \\ & \curvearrowleft & \\ & \text{cod} & \end{array}$$

Dabei ist $\text{dom} \circ \text{id} = \text{cod} \circ \text{id}$. Eine Familie von Morphismen mit gleicher Quelle oder Domäne wird *Span* genannt und eine Familie von Morphismen mit gleichem Ziel oder Kodomäne wird *Kospan* genannt.

Korollar 1.23. Sei f ein Morphismus. Ist g ein Inverses von f und ist h ein Inverses von g , dann ist:

$$f = f \circ \text{id} = f \circ g \circ h = \text{id} \circ h = h \quad (1.26)$$

Lemma 1.24. Sei f ein Morphismus. Ist g ein Linksinverses von f und ist h ein Linksinverses von g , dann sind beide ebenso Rechtsinverse.

Mit Korollar (1.23) folgt darüber hinaus $f = h$.

Beweis. Es ist:

$$f \circ g = \text{id} \circ f \circ g = h \circ g \circ f \circ g = h \circ \text{id} \circ g = h \circ g = \text{id} \quad (1.27)$$

$$g \circ h = g \circ h \circ \text{id} = g \circ h \circ g \circ f = g \circ \text{id} \circ f = g \circ f = \text{id} \quad (1.28)$$

□

Lemma 1.25. Sei f ein Morphismus. Ist g ein Rechtsinverses von f und ist h ein Rechtsinverses von g , dann sind beide ebenso Linksinverse.

Mit Korollar (1.23) folgt darüber hinaus $f = h$.

Beweis. Es ist:

$$g \circ f = g \circ f \circ \text{id} = g \circ f \circ g \circ h = g \circ \text{id} \circ h = g \circ h = \text{id} \quad (1.29)$$

$$h \circ g = h \circ g \circ \text{id} = h \circ g \circ f \circ g = h \circ \text{id} \circ g = h \circ g = \text{id} \quad (1.30)$$

□

Kapitel 2

Initiale und terminale Objekte

2.1 Initiale Objekte

Definition 2.1 (Initiales Objekt). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ für das:

$$\forall_{Y \in \text{Ob } \mathcal{C}} : |\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)| = 1 \quad (2.1)$$

ein initiales Objekt. Wird $=$ durch $\geq$ ersetzt, wird das Objekt ein schwaches initiales Objekt genannt.

Von einem initialen Objekt aus führt daher zu jedem anderen Objekt nur ein Pfeil, insbesondere enthält $\text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ nur die Identität id_X . $\Delta^0 * \mathbb{C}$ enthält genau ein initiales Objekt.

Beispiel 2.2. Das einzige Objekt in der terminalen Kategorie ist initial.

Beispiel 2.3. Die (nach dem Leermengenaxiom eindeutige) leere Menge $\emptyset$ ist initial in **Set**. Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist initial in **CRing**. Der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist initial in **Field**₀, aber nicht in **Field**.

Lemma 2.4. Initiale Objekte sind isomorph.

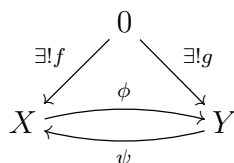
Beweis. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und zwei initiale Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ gibt es genau einen Morphismus $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, da X initial ist, und genau einen Morphismus $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, da Y initial ist. Nun ist $g \circ f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X) = \{\text{id}_X\}$, womit $g \circ f = \text{id}_X$, und $f \circ g \in \text{End}_{\mathcal{C}}(Y) = \{\text{id}_Y\}$, womit $f \circ g = \text{id}_Y$. $\square$

In der Kategorientheorie lässt sich $\mathbb{Q}$ daher alternativ als die bis auf Isomorphie eindeutigen initialen Objekte in **Field** definieren.

Das bis auf Isomorphie eindeutige initiale Objekt einer Kategorie $\mathcal{C}$ wird als $0 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ bezeichnet. Jedes Diagramm zweier Morphismen $f: 0 \rightarrow X$ und $g: 0 \rightarrow Y$ lässt sich zu einem kommutativen Dreieck erweitern:

$$f = \psi \circ g \quad (2.2)$$

$$g = \phi \circ f \quad (2.3)$$



2.2 Terminale Objekte

Definition 2.5 (Terminales Objekt). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Objekt $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ für das:*

$$\forall_{X \in \text{Ob } \mathcal{C}} : |\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)| = 1 \quad (2.4)$$

ein terminales Objekt. Wird = durch $\geq$ ersetzt, wird das Objekt ein schwaches terminales Objekt genannt.

Zu einem terminalen Objekt führt daher von jedem anderem Objekt aus nur ein Pfeil, insbesondere enthält $\text{End}_{\mathcal{C}}(Y)$ nur die Identität id_Y . $\mathbb{C} * \Delta^0$ enthält genau ein terminales Objekt.

Beispiel 2.6. *Das einzige Objekt in der terminalen Kategorie ist terminal.*

Beispiel 2.7. *Die (bis auf Isomorphie eindeutige) einelementige Menge ist terminal in **Set**. Die (bis auf Isomorphie eindeutige) triviale Gruppe 1 ist terminal in **Ab** und **Grp**.*

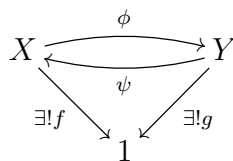
Lemma 2.8. *Terminale Objekte sind isomorph.*

Beweis. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und zwei terminale Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ gibt es genau einen Morphismus $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, da Y terminal ist, und genau einen Morphismus $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, da X terminal ist. Nun ist $g \circ f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X) = \{\text{id}_X\}$, womit $g \circ f = \text{id}_X$, und $f \circ g \in \text{End}_{\mathcal{C}}(Y) = \{\text{id}_Y\}$, womit $f \circ g = \text{id}_Y$. $\square$

Das bis auf Isomorphie eindeutige terminale Objekt einer Kategorie $\mathcal{C}$ wird als $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ bezeichnet. Jedes Diagramm zweier Morphismen $f: X \rightarrow 1$ und $g: Y \rightarrow 1$ lässt sich zu einem kommutativen Dreieck erweitern:

$$f = g \circ \phi \quad (2.5)$$

$$g = f \circ \psi \quad (2.6)$$



2.3 Nullobjekte

Definition 2.9 (Nullobjekt). *Ein Objekt, dass sowohl ein initiales als auch ein terminales Objekt ist, wird Nullobjekt genannt.*

Beispiel 2.10. *In **Set** gibt es kein Nullobjekt.*

Beispiel 2.11. *In **Grp** ist das Nullobjekt die triviale Gruppe. In **Top**_{*} ist das Nullobjekt der einpunktige punktierte topologische Raum.*

Aus Lemma (2.4) und (2.8) folgt:

Korollar 2.12. *Nullobjekte sind isomorph.*

Das Nullobjekt einer Kategorie wird aufgrund dieser Eindeutigkeit bis auf Isomorphie auch als $\Omega_{\mathcal{C}} \in \text{Ob } \mathcal{C}$ (oder Ω , wenn die Kategorie klar ist) bezeichnet.

Definition 2.13 (Nullmorphismus). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit Nullobjekt $\Omega \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ wird der vom eindeutigen Diagramm:*

$$X \xrightarrow{!} \Omega \xrightarrow{!} Y \tag{2.7}$$

durch Komposition hervorgehende Morphismus $\Omega_{X,Y} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ der Nullmorphismus von X und Y genannt.

Kapitel 3

Spezielle Morphismen

Die Einteilung von Abbildungen zwischen Mengen in Injektionen, Surjektionen und Bijektionen gehört zu den wichtigsten und weitreichendsten Resultaten der Mengenlehre. Die dabei verwendeten Definitionen benutzen jedoch die Elemente der beteiligten Mengen. Nach Definition (??) lässt sich die Definition eines Elementes zwar auf Kategorien mit terminalem Objekt übertragen, doch eine weitreichendere Verallgemeinerung ist möglich mit den anderen aus der Mengenlehre bekannten Definitionen für Injektionen, Surjektionen und Bijektionen als links-, rechts- und beidseitig kürzbaren Abbildungen.

3.1 Isomorphismen

Bei der Untersuchung mathematischer Strukturen ist nicht relevant, ob zwei verschiedene mathematische Strukturen tatsächlich bis zur Benennung und Symbole der einzelnen Teile völlig identisch sind, sondern es ist nur relevant, ob diese teilweise oder vollständig die gleichen mathematischen Eigenschaften besitzen. Bei einer reinen Umbenennung der einzelnen Teile ergibt sich zwar strenggenommen eine neue mathematischen Struktur, aber sämtliche mathematischen Eigenschaften bleiben erhalten.

In der Topologie wird für die teilweise oder vollständige Erhaltung von Eigenschaften jeweils Homöomorphismen und Homotopieäquivalenzen verwendet.

Definition 3.1 (Isomorphismus). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ für den ein Morphismus $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$ existiert, ein Isomorphismus (oder invertierbarer Morphismus).*

Existiert zwischen zwei Objekten ein Isomorphismus, dann werden diese *isomorph* genannt, notiert als $X \cong Y$. Ein Endomorphismus, der zudem ein Isomorphismus ist, wird *Automorphismus* genannt. Die Klasse der Automorphismen eines Objektes X wird als $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \subseteq \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ bezeichnet und die Klasse der Isomorphismen wird als $\text{Iso } \mathcal{C} \subseteq \text{Ar } \mathcal{C}$ bezeichnet. Der inverse Morphismus eines Isomorphismus ist eindeutig.

Beweis. Sei $f: X \rightarrow Y$ ein Isomorphismus sowie $g, g': Y \rightarrow X$ zwei inverse Morphismen von f , dann ist $g = g'$ nach den beiden verschiedenen Rechnungen:

$$g = g \circ \text{id}_Y = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \text{id}_X \circ g' = g'; \quad (3.1)$$

$$g = \text{id}_X \circ g = (g' \circ f) \circ g = g' \circ (f \circ g) = g' \circ \text{id}_Y = g'. \quad (3.2)$$

□

Korollar 3.2. *Isomorphismen sind Bimorphismen.*

Spezieller wird ein Morphismus, der ein Rechtsinverses besitzt, also ein Linksinverses ist, auch *Retraktion* und einer der ein Linksinverses besitzt, also ein Rechtsinverses ist, auch *Koretraktion* (oder *Schnitt*) genannt. Die Klassen der Retraktionen und Schnitte werden als $\text{Ret } \mathcal{C}, \text{Sec } \mathcal{C} \subseteq \text{Ar } \mathcal{C}$ bezeichnet.

Auf der Klasse $\text{Ob } \mathcal{C}$ der Objekte lässt sich eine XXXXordnung $\leq$ definieren durch $X \leq Y$ für Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ genau dann, wenn ein Monomorphismus $X \hookrightarrow Y$ existiert. Die Relation ist reflexiv nach Beispiel (3.5) und transitiv nach Lemma (3.7). Die Relation muss nicht antisymmetrisch sein, XXXX. Die Relation muss nicht total sein, etwa nicht in einer diskreten Kategorie.

Auf der Klasse $\text{Ob } \mathcal{C}$ der Objekte lässt sich eine XXXXordnung $\leq$ definieren durch $X \leq Y$ für Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ genau dann, wenn ein Epimorphismus $X \twoheadrightarrow Y$ existiert. Die Relation ist reflexiv nach Beispiel (3.11) und transitiv nach Lemma (3.15). Die Relation muss nicht antisymmetrisch sein, XXXX. Die Relation muss nicht total sein, etwa nicht in einer diskreten Kategorie.

Lemma 3.3. *Isomorphismen erfüllen die 2-aus-3-Eigenschaft.*

Beweis. XXXX □

3.2 Monomorphismen

Definition 3.4 (Monomorphismus). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und Objekte $Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist ein Morphismus $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ für den:*

$$\bigvee_{X \in \text{Ob } \mathcal{C}} \bigvee_{g_1, g_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)} : f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \quad (3.3)$$

ein Monomorphismus (oder monischer Morphismus).

Monomorphismen sind also *linkskürzbar*. In der Kategorie der Mengen sind Monomorphismen die injektiven Abbildungen. Die Klasse der Monomorphismen wird als $\text{Mono } \mathcal{C} \subseteq \text{Ar } \mathcal{C}$ bezeichnet.

Beispiel 3.5. *Identitäts- und Isomorphismen sind Monomorphismen.*

Beispiel 3.6. *In einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit initialem Objekt $0 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ der Morphismus $0 \xrightarrow{!} X$ monisch.*

Lemma 3.7. *Die Komposition von Monomorphismen ist monisch.*

Beweis. Seien $f: C \rightarrow D$ und $g: B \rightarrow C$ Monomorphismen sowie $h_1, h_2: A \rightarrow B$ parallele Morphismen. Dann ist:

$$f \circ g \circ h_1 = f \circ g \circ h_2 \xrightarrow{f \text{ monisch}} g \circ h_1 = g \circ h_2 \xrightarrow{g \text{ monisch}} h_1 = h_2 \quad (3.4)$$

□

Lemma 3.8. *Ist $f \circ g$ monisch, dann ist g monisch.*

Beweis.

$$g \circ h_1 = g \circ h_2 \Rightarrow f \circ g \circ h_1 = f \circ g \circ h_2 \xrightarrow{f \circ g \text{ monisch}} h_1 = h_2 \quad (3.5)$$

□

Die Gleichung $f \circ g_1 = f \circ g_2$ in Definition (3.4) kann mit der Abbildung in Gleichung (23.2) umgeschrieben werden zu $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f)(g_1) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f)(g_2)$. Die Bedingung, dass daraus $g_1 = g_2$ folgt, ist also äquivalent dazu, dass $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f)$ injektiv ist.

Korollar 3.9. *Ein Morpismus f ist genau dann monisch, wenn $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f)$ für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ injektiv ist.*

3.3 Epimorphismen

Definition 3.10 (Epimorphismus). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist ein Morpismus $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ für den:*

$$\bigvee_{Z \in \text{Ob } \mathcal{C}} \bigvee_{g_1, g_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)} : g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2 \quad (3.6)$$

ein Epimorphismus (oder epischer Morpismus).

Epimorphismen sind also *rechtskürzbar*. In der Kategorie der Mengen sind Epimorphismen die surjektiven Abbildungen. Morphismen, die sowohl Mono- als auch Epimorphismen sind werden *Bimorphismen* genannt. Die Klasse der Epimorphismen wird als $\text{Epi } \mathcal{C} \subseteq \text{Ar } \mathcal{C}$ bezeichnet.

Beispiel 3.11. *Identitäts- und Isomorphismen sind Epimorphismen.*

Beispiel 3.12. *In einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit terminalem Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ der Morpismus $X \xrightarrow{!} 1$ episch.*

Beispiel 3.13. *Die Inklusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ ist ein Epimorphismus in **CRing**.*

Beispiel 3.14. *Für einen Hausdorff-Raum X und eine dichte Teilmenge $A \subseteq X$ ist die Inklusion $A \hookrightarrow X$ ein Epimorphismus in **Haus**.*

Lemma 3.15. *Die Komposition von Epimorphismen ist episch.*

Beweis. Seien $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ Epimorphismen und $h_1, h_2: C \rightarrow D$ parallele Morphismen. Dann ist:

$$h_1 \circ g \circ f = h_2 \circ g \circ f \xrightarrow{f \text{ episch}} h_1 \circ g = h_2 \circ g \xrightarrow{g \text{ episch}} h_1 = h_2 \quad (3.7)$$

□

Lemma 3.16. *Ist $f \circ g$ episch, dann ist f episch.*

Beweis.

$$h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 \circ f \circ g = h_2 \circ f \circ g \xrightarrow{f \circ g \text{ episch}} h_1 = h_2 \quad (3.8)$$

□

Die Gleichung $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ in Definition (3.10) kann mit der Abbildung in Gleichung (23.1) umgeschrieben werden zu $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z)(g_1) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z)(g_2)$. Die Bedingung, dass daraus $g_1 = g_2$ folgt, ist also äquivalent dazu, dass $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z)$ injektiv ist.

Korollar 3.17. *Ein Morpismus f ist genau dann episch, wenn $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z)$ für jedes Objekt $Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ injektiv ist.*

3.4 Extremale Morphismen

Definition 3.18 (Extremaler Monomorphismus). *Ein Monomorphismus f , für den für jede Faktorisierung $f = f_1 \circ f_2$ mit f_2 episch folgt, dass f_2 sogar ein Isomorphismus ist, ein extremaler Monomorphismus.*

Analog zu Lemma (3.8) gilt (Siehe [2], Proposition 7.62 2.):

Lemma 3.19. *Ist $g \circ f$ ein extremaler Monomorphismus, dann ist f ein extremaler Monomorphismus.*

Beweis. Sei $f = f_1 \circ f_2$ mit f_2 episch, dann ist $g \circ f = g \circ f_1 \circ f_2$ mit f_2 episch. Da $g \circ f$ ein extremaler Monomorphismus ist, ist f_2 sogar ein Isomorphismus. $\square$

Definition 3.20 (Extremaler Epimorphismus). *Ein Epimorphismus g , für den für jede Faktorisierung $g = g_1 \circ g_2$ mit g_1 monisch folgt, dass g_1 sogar ein Isomorphismus ist, ein extremaler Epimorphismus.*

Analog zu Lemma (3.16) gilt (Siehe [2], Proposition XXXX.):

Lemma 3.21. *Ist $g \circ f$ ein extremaler Epimorphismus, dann ist g ein extremaler Epimorphismus.*

Beweis. Sei $g = g_1 \circ g_2$ mit g_1 monisch, dann ist $g \circ f = g_1 \circ g_2 \circ f$ mit g_1 monisch. Da $g \circ f$ ein extremaler Epimorphismus ist, ist g_1 sogar ein Isomorphismus. $\square$

Lemma 3.22. *Die jeweiligen Klassen von:*

I.) Isomorphismen

II.) Epi- und extremalen Monomorphismen

III.) Mono- und extremalen Epimorphismen

sind gleich.

Beweis. I.) $\Rightarrow$ II.): Trivial. I.) $\Rightarrow$ III.): Trivial.

II.) $\Rightarrow$ I.): Sei $f: X \rightarrow Y$ ein Epimorphismus und regulärer Monomorphismus. Aus der Faktorisierung $f = \text{id}_Y \circ f$ folgt die Behauptung.

III.) $\Rightarrow$ I.): Sei $f: X \rightarrow Y$ ein Monomorphismus und regulärer Epimorphismus. Aus der Faktorisierung $f = f \circ \text{id}_X$ folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 3.23. *Für eine Kategorie sind äquivalent:*

I.) Alle Bimorphismen sind Isomorphismen.

II.) Alle Monomorphismen sind extremal.

III.) Alle Epimorphismen sind extremal.

Beweis. XXXX $\square$

3.5 Schnitte

Lemma 3.24. *Die Komposition von Retraktionen ist eine Retraktion.*

Beweis. Seien f und g Retraktionen mit jeweiligen Schnitten s und s' , dann ist $g \circ f$ eine Retraktion mit Schnitt $s \circ s'$. $\square$

Lemma 3.25. *Ist $g \circ f$ eine Retraktion, dann ist g eine Retraktion.*

Beweis. Ist s ein Schnitt von $g \circ f$, dann ist $f \circ s$ ein Schnitt von g . $\square$

Lemma 3.26. *Ist $g \circ f$ eine Retraktion und g ein Schnitt, dann ist f eine Retraktion.*

Beweis. Sei s ein Schnitt von $g \circ f$ und r eine Retraktion von g , dann ist:

$$g \circ f \circ s = \text{id} \xrightarrow{r \circ -} f \circ s = r \xrightarrow{- \circ g} f \circ s \circ g = r \circ g = \text{id}. \quad (3.9)$$

$\square$

Lemma 3.27. *Die Komposition von Schnitten ist ein Schnitt.*

Beweis. Seien f und g Schnitte mit jeweiligen Retraktionen r und r' , dann ist $g \circ f$ ein Schnitt mit Retraktion $r \circ r'$. $\square$

Lemma 3.28. *Ist $g \circ f$ ein Schnitt, dann ist f ein Schnitt.*

Beweis. Ist r eine Retraktion von $g \circ f$, dann ist $r \circ g$ eine Retraktion von f . $\square$

Lemma 3.29. *Ist $g \circ f$ ein Schnitt und f eine Retraktion, dann ist g ein Schnitt.*

Beweis. Sei r eine Retraktion von $g \circ f$ und s ein Schnitt von f , dann ist:

$$r \circ g \circ f = \text{id} \xrightarrow{- \circ s} r \circ g = s \xrightarrow{f \circ -} f \circ r \circ g = f \circ s = \text{id}. \quad (3.10)$$

$\square$

Lemma 3.30. *Retraktionen sind Epimorphismen.*

Retraktionen werden daher auch *zerfallende Epimorphismen* genannt.

Beweis. Sei $r: Y \rightarrow X$ eine Retraktion, dann existiert ein Schnitt $s: X \rightarrow Y$ mit $r \circ s = \text{id}_X$. Seien $i_1, i_2: X \rightarrow Z$ beliebig, dann ist:

$$i_1 \circ r = i_2 \circ r \Rightarrow i_1 = i_1 \circ r \circ s = i_2 \circ r \circ s = i_2 \quad (3.11)$$

$\square$

Lemma 3.31. *Ein Monomorphismus, der eine Retraktion ist, ist ein Isomorphismus.*

Der Satz kann umformuliert werden: Ein Bimorphismus mit einem Rechtsinversen ist ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $f: X \rightarrow Y$ ein Monomorphismus, der eine Retraktion ist, womit ein Schnitt $s: Y \rightarrow X$ mit $f \circ s = \text{id}_Y$ existiert. Dann ist:

$$f \circ s \circ f = \text{id}_Y \circ f = f = f \circ \text{id}_X \xrightarrow{f \text{ monisch}} s \circ f = \text{id}_X \quad (3.12)$$

$\square$

Korollar 3.32. *Für einen Bimorphismus ist ein linksinverser Morphismus auch rechtsinvers.*

Lemma 3.33. *Schnitte sind Monomorphismen.*

Schnitte werden daher auch *zerfallende Monomorphismen* genannt.

Beweis. Sei $s: X \rightarrow Y$ ein Schnitt, dann existiert eine Retraktion $r: Y \rightarrow X$ mit $r \circ s = \text{id}_X$. Seien $h_1, h_2: A \rightarrow X$ beliebig, dann ist:

$$s \circ h_1 = s \circ h_2 \Rightarrow h_1 = r \circ s \circ h_1 = r \circ s \circ h_2 = h_2 \quad (3.13)$$

□

Korollar 3.34. *In einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit initialem Objekt $0 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist jeder Morphismus $X \rightarrow 0$ eine Retraktion (mit Schnitt $0 \xrightarrow{!} X$) und daher nach Lemma (3.30) episch.*

Umgekehrt muss der eindeutige Morphismus $0 \xrightarrow{!} X$ kein Schnitt sein, da womöglich kein Morphismus $X \rightarrow 0$ existiert.

Korollar 3.35. *In einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit terminalem Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist jeder Morphismus $1 \rightarrow X$ ein Schnitt (mit Retraktion $X \xrightarrow{!} 1$) und daher nach Lemma (3.33) monisch.*

Umgekehrt muss der eindeutige Morphismus $X \xrightarrow{!} 1$ keine Retraktion sein, da womöglich kein Morphismus $1 \rightarrow X$ existiert.

Lemma 3.36. *Ein Epimorphismus, der ein Schnitt ist, ist ein Isomorphismus.*

Der Satz kann umformuliert werden: Ein Bimorphismus mit einem Linksinversen ist ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $f: X \rightarrow Y$ ein Epimorphismus, der ein Schnitt ist, womit eine Retraktion $r: Y \rightarrow X$ mit $r \circ f = \text{id}_X$ existiert. Dann ist:

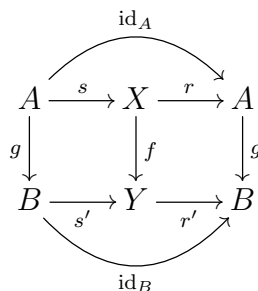
$$f \circ r \circ f = f \circ \text{id}_X = f = \text{id}_Y \circ f \xrightarrow{f \text{ episch}} f \circ r = \text{id}_Y \quad (3.14)$$

□

Korollar 3.37. *Für einen Bimorphismus ist ein rechtsinverser Morphismus auch linksinvers.*

3.6 Retraktionen

Definition 3.38 (Retrakt eines Morphismus). *Für einen Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ist ein Morphismus $g: A \rightarrow B$ mit Retrakten A und B von X und Y , sodass das Diagramm:*



kommutiert, ein Retrakt von f .

Für ein Objekt Z folgt durch Anwendung von $\text{Hom}(Z, -)$ und $\text{Hom}(-, Z)$ auf dieses Diagramm, dass $\text{Hom}(Z, g)$ ein Retrakt von $\text{Hom}(Z, f)$ und $\text{Hom}(g, Z)$ ein Retrakt von $\text{Hom}(f, Z)$ ist.

Lemma 3.39. *Isomorphismen sind stabil unter Retraktionen.*

Beweis. Sei $f: X \rightarrow Y$ ein Isomorphismus mit Retrakten A und B von X und Y sowie $g: A \rightarrow B$ derart, dass das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_A & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 A & \xrightarrow{s} & X & \xrightarrow{r} & A \\
 \downarrow g & & \uparrow f^{-1} & & \downarrow g \\
 B & \xrightarrow{s'} & Y & \xrightarrow{r'} & B \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\
 & & \text{id}_B & &
 \end{array}$$

kommutiert. Dann ist $r \circ f^{-1} \circ s'$ ein Inverses von g , da:

$$s' \circ g = f \circ s \Rightarrow f^{-1} \circ s' \circ g = s \Rightarrow r \circ f^{-1} \circ s' \circ g = \text{id}_A \quad (3.15)$$

$$r' \circ f = g \circ r \Rightarrow r' = g \circ r \circ f^{-1} \Rightarrow \text{id}_B = g \circ r \circ f^{-1} \circ s' \quad (3.16)$$

□

Lemma 3.40. *Mono- und Epimorphismen sind stabil unter Retraktionen.*

Beweis.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \text{id}_A & & & \\
 & \curvearrowright & & & \curvearrowleft & & \\
 C & \xrightarrow{h_2} & A & \xrightarrow{s} & X & \xrightarrow{r} & A \\
 & \searrow h_1 & \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow g \\
 & & B & \xrightarrow{s'} & Y & \xrightarrow{r'} & B \\
 & & & \text{id}_B & & & \\
 & & & & & & \downarrow i_2 \\
 & & & & & & Z \\
 & & & & & & \uparrow i_1
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 g \circ h_1 = g \circ h_2 &\Rightarrow s' \circ g \circ h_1 = s' \circ g \circ h_2 \Rightarrow f \circ s \circ h_1 = f \circ s \circ h_2 \\
 &\xrightarrow{f \text{ monisch}} s \circ h_1 = s \circ h_2 \Rightarrow h_1 = r \circ s \circ h_1 = r \circ s \circ h_2 = h_2
 \end{aligned} \quad (3.17)$$

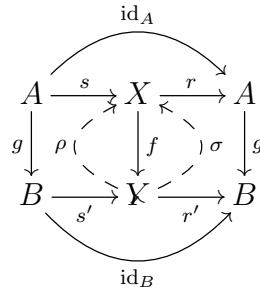
$$\begin{aligned}
 i_1 \circ g = i_2 \circ g &\Rightarrow i_1 \circ g \circ r = i_2 \circ g \circ r \Rightarrow i_1 \circ r' \circ f = i_2 \circ r' \circ f \\
 &\xrightarrow{f \text{ episch}} i_1 \circ r' = i_2 \circ r' \Rightarrow i_1 = i_1 \circ r' \circ s' = i_2 \circ r' \circ s' = i_2
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

□

Lemma 3.41. *Retraktionen und Schnitte sind stabil unter Retraktionen.*

Das verallgemeinert Lemma (3.40).

Beweis.



□

Ist f ein Schnitt, dann existiert eine Retraktion $\rho: Y \rightarrow X$ mit $\rho \circ f = \text{id}_X$ und es ist:

$$r \circ \rho \circ s' \circ g = r \circ \rho \circ f \circ s = r \circ s = \text{id}_A \quad (3.19)$$

Ist f eine Retraktion, dann existiert ein Schnitt $\sigma: Y \rightarrow X$ mit $f \circ \sigma = \text{id}_Y$ und es ist:

$$g \circ r \circ \sigma \circ s' = r' \circ f \circ \sigma \circ s' = r' \circ s' = \text{id}_B \quad (3.20)$$

Kapitel 4

Generatoren und Kogeneratoren

Mono- bzw. Epimorphismen sind spezielle Morphismen, die aus gleichen parallelen Morphismen von links bzw. rechts herausgekürzt werden können (sofern sie in der Komposition enthalten sind), sodass gleiche parallele Morphismen übrig bleiben. Umgekehrt lässt sich untersuchen, welche speziellen Morphismen mit verschiedenen parallelen Morphismen von links bzw. rechts komponiert werden können, sodass sich dabei verschiedene parallele Morphismen ergeben.

4.1 Generatoren

Definition 4.1 (Generator). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Familie an Objekten $(X_i)_{i \in I}$, für die für verschiedene parallele Morphismen $g_1, g_2: Y \rightrightarrows Z$ ein $i \in I$ und ein Morphismus $f: X_i \rightarrow Y$ existiert mit $g_1 \circ f \neq g_2 \circ f$ ein Generator (oder Separator).*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & g_1 \circ f & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 X_i & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow[g_2]{g_1} & Z \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & g_2 \circ f & &
 \end{array}$$

Ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ wird *Generator* genannt, wenn $\{X\}$ ein Generator ist.

Beispiel 4.2. *In Set ist $\{*\}$ (sowie jede andere nichtleere Menge) ein Generator. Für verschiedene parallele Morphismen $g_1, g_2: Y \rightrightarrows Z$ gibt es ein $y \in Y$ mit $g_1(y) \neq g_2(y)$, für $h: \{*\} \rightarrow Y, * \mapsto y$ ist daher $g_1 \circ h \neq g_2 \circ h$.*

Beispiel 4.3. *In Mon ist $\mathbb{N}$ ein Generator. In AbGrp ist $\mathbb{Z}$ ein Generator.*

Da die Definition von Generatoren durch die Definition der Monomorphismen motiviert ist, lässt sich untersuchen, ob es ein zu Korollar (3.9) analoges Resultat gibt, um Generatoren über induzierte Hom-Funktoren zu klassifizieren.

Die Gleichung $g_1 \circ f \neq g_2 \circ f$ in Definition (4.1) kann mit der Abbildung in Gleichung (23.1) umgeschrieben werden zu $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z)(g_1) \neq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z)(g_2)$. Die Bedingung, dass dies aus $g_1 \neq g_2$ folgt, ist also äquivalent dazu, dass $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z)$ injektiv ist. Hier taucht jedoch nicht das Objekt X , der zu untersuchende Generator, in der Hom-Abbildung auf. Daher muss die Gleichung mit der Hom-Abbildung der Nachkomposition umformuliert

werden.

Ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist genau dann ein Generator, wenn:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set} \quad (4.1)$$

ein treuer Funktor ist.

Beweis. (Siehe [2], Proposition 7.12) Die Bedingung, dass $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ treu ist, bedeutet, dass für alle Objekte $Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ die Abbildung:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)), g \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, g) \quad (4.2)$$

injektiv ist, also für alle verschiedenen parallelen Morphismen $g_1, g_2: Y \rightarrow Z$ folgt, dass $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, g_1) \neq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, g_2)$. Das ist äquivalent zur Existenz eines Morphismus $f: X \rightarrow Y$ mit $g_1 \circ f = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, g_1)(f) \neq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, g_2)(f) = g_2 \circ f$, was genau die Bedingung ist, dass X ein Generator ist. $\square$

4.2 Kogeneratoren

Definition 4.4 (Kogenerator). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Familie an Objekten $(Z_i)_{i \in I}$, für die für verschiedene parallele Morphismen $f_1, f_2: X \rightrightarrows Y$ ein $i \in I$ und ein Morphismus $g: Y \rightarrow Z_i$ existiert mit $g \circ f_1 \neq g \circ f_2$ ein Kogenerator (oder Koseperator).

$$\begin{array}{ccccc} & & g \circ f_1 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ X & \xrightarrow{f_1} & Y & \xrightarrow{g} & Z_i \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & g \circ f_2 & & \end{array}$$

Ein Objekt $Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ wird *Kogenerator* genannt, wenn $\{Z\}$ ein Kogenerator ist.

Da die Definition von Kogeneratoren durch die Definition der Epimorphismen motiviert ist, lässt sich untersuchen, ob es ein zu Korollar (3.17) analoges Resultat gibt, um Kogeneratoren über induzierte Hom-Funktoren zu klassifizieren.

Die Gleichung $g \circ f_1 \neq g \circ f_2$ in Definition (4.4) kann mit der Abbildung in Gleichung (23.2) umgeschrieben werden zu $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, g)(f_1) \neq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, g)(f_2)$. Die Bedingung, dass dies aus $f_1 \neq f_2$ folgt, ist also äquivalent dazu, dass $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, g)$ injektiv ist. Hier taucht jedoch nicht das Objekt Z , der zu untersuchende Kogenerator, in der Hom-Abbildung auf. Daher muss die Gleichung mit der Hom-Abbildung der Vorkomposition umformuliert werden. Ein Objekt $Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist genau dann ein Kogenerator, wenn:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Z): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set} \quad (4.3)$$

ein treuer Funktor ist.

Beweis. (Siehe [2], Proposition 7.17) Die Bedingung, dass $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Z)$ treu ist, bedeutet, dass für alle Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ die Abbildung:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)), f \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z) \quad (4.4)$$

injektiv ist, also für alle verschiedenen parallelen Morphismen $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ folgt, dass $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f_1, Z) \neq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f_2, Z)$. Das ist äquivalent zur Existenz eines Morphismus $g: Y \rightarrow Z$ mit $g \circ f_1 = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f_1, Z)(g) \neq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f_2, Z)(g) = g \circ f_2$, was genau die Bedingung ist, dass Z ein Kogenerator ist. $\square$

Kapitel 5

Injektive und projektive Objekte

Injektive und projektive Objekte sind die Verallgemeinerung von injektiven und projektiven Moduln von der Modultheorie auf die Kategorientheorie.

5.1 Injektive Objekte

Definition 5.1 (Injektives Objekt). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Objekt $I \in \text{Ob}\mathcal{C}$, für das es $\forall X, Y \in \text{Ob}\mathcal{C}$, für alle Monomorphismen $\phi \in \mathbb{C}(X, Y)$ und:

$$\forall_{f \in \mathbb{C}(X, I)} \exists_{f' \in \mathbb{C}(Y, I)} : f = f' \circ \phi \quad (5.1)$$

also für den das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & I \\ \downarrow \phi & \nearrow f' & \\ Y & & \end{array}$$

kommutiert, ein injektives Objekt.

Hat $\mathbb{C}$ ein terminales Objekt $1 \in \text{Ob}\mathcal{C}$, dann ist $1 = ! \circ \psi$, weshalb:

Korollar 5.2. Jedes terminale Objekt ist injektiv.

Beispiel 5.3. In **Set** ist jedes Objekt (Menge) injektiv.

Lemma 5.4. Retrakte von injektiven Objektes sind injektiv.

Beweis. Sei $\mathbb{C}$ eine Kategorie und $I \in \text{Ob}\mathcal{C}$ injektiv. Sei $X \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ein Retrakt von I und seien $f: X \rightarrow I$ und $g: I \rightarrow X$ Morphismen mit $gf = \text{id}_X$. Sei $\phi: Z \rightarrow Y$ ein Monomorphismus und $h: Z \rightarrow X$ ein Morphismus. Da $fh: Z \rightarrow I$ gibt es ein $h': Y \rightarrow I$ mit $fh = h'\psi$, also $h = gh'\psi$.

$$\begin{array}{ccccc} & & \phi & & \\ & & \swarrow & \searrow & \\ Y & & & & Z \\ & \searrow h' & & \searrow fh & \\ & & X & \xrightarrow{f} & I \xrightarrow{g} X \\ & \searrow gh' & & \nearrow \text{id}_I & \\ & & & & \end{array}$$

□

Lemma 5.5. *Das Produkt injektiver Objekte ist injektiv.*

Beweis. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie injektiver Objekte. XXXX □

Lemma 5.6. *In einer lokal kleinen Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Objekt $I \in \text{Ob } \mathcal{C}$ genau dann injektiv, wenn $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, I): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ alle Monomorphismen auf surjektive Abbildungen abbildet.*

Beweis. XXXX □

5.2 Projektive Objekte

Definition 5.7 (Projektives Objekt). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Objekt $P \in \text{Ob } \mathcal{C}$, für das es $\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, für alle Epimorphismen $\psi \in \mathcal{C}(X, Y)$ und:*

$$\forall_{f \in \mathcal{C}(P, Y)} \exists_{f' \in \mathcal{C}(P, X)} : f = \psi \circ f' \quad (5.2)$$

also für den das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow f' & \downarrow \psi \\ P & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

kommutiert, ein projektives Objekt.

Hat $\mathcal{C}$ ein initiales Objekt $0 \in \text{Ob } \mathcal{C}$, dann ist $! = \psi \circ !$, weshalb:

Korollar 5.8. *Jedes initiale Objekt ist projektiv.*

Beispiel 5.9. *In $\mathbf{Set}$ ist jedes Objekt (Menge) projektiv.*

Lemma 5.10. *Retrakte von projektiven Objektes sind projektiv.*

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $P \in \text{Ob } \mathcal{C}$ projektiv. Sei $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ein Retrakt von P und seien $f: X \rightarrow P$ und $g: P \rightarrow X$ Morphismen mit $gf = \text{id}_P$. Sei $\psi: Y \rightarrow Z$ ein Epimorphismus und $h: X \rightarrow Z$. Da $hg: P \rightarrow Z$ gibt es ein $h': P \rightarrow Y$ mit $hg = \psi h'$, also $h = \psi h' f$.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_P & & \\ & \nearrow f & \text{---} & \searrow g & \\ X & \xrightarrow{f} & P & \xrightarrow{g} & X \\ & \downarrow h' & \nearrow h'f & \searrow h & \\ & Y & & & Z \\ & & \nearrow hg & & \\ & & \psi & & \end{array}$$

□

Lemma 5.11. *Das Koprodukt projektiver Objekte ist projektiv.*

Beweis. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie projektiver Objekte. XXXX □

Lemma 5.12. *In einer lokal kleinen Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Objekt $P \in \text{Ob } \mathcal{C}$ genau dann projektiv, wenn $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ alle Epimorphismen auf surjektive Abbildungen abbildet.*

Beweis. XXXX □

Kapitel 6

Lokalität

6.1 Lokale Objekte

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $J \subseteq \text{Ar } \mathcal{C}$ eine Klasse an Morphismen.

Definition 6.1 (*J-lokales Objekt*). Ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, für welches $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X)$ für alle $f \in J$ ein Isomorphismus (eine Bijektion) ist, wird *J-lokales Objekt* genannt.

Beispiel 6.2. Terminale Objekte sind *J-lokal* für jedes $J \subseteq \text{Ar } \mathcal{C}$.

6.2 Lokale Morphismen

Definition 6.3 (*J-lokaler Morphismus*). Ein Morphismus $f \in \text{Ar } \mathcal{C}$, für den $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X)$ für jedes *J-lokale* Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ein Isomorphismus (eine Bijektion) ist, wird *J-lokaler Morphismus* genannt.

Beispiel 6.4. Isomorphismen sind *J-lokal* für jedes $J \subseteq \text{Ar } \mathcal{C}$.

Beispiel 6.5. Alle Morphismen in J sind *J-lokale Morphismen*.

Lemma 6.6. Die Komposition von *W-lokalen* Morphismen ist ein *W-lokaler Morphismus*.

Beweis. Sei X ein *W-lokales* Objekt und seien $f, g \in \text{Ar } \mathcal{C}$ komponierbare Morphismen, dann ist $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(g \circ f, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(g, X)$ bijektiv. $\square$

Lemma 6.7. Die Retraktion eines *J-lokalen Schnittes* ist *J-lokal*.

Beweis. Sei $s: X \rightarrow Y$ ein *J-lokaler Schnitt* und $r: Y \rightarrow X$ mit $r \circ s = \text{id}_X$ dessen Retraktion. Sei Z ein *J-lokales* Objekt, dann ist $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(s, Z)$ bijektiv und wegen:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(s, Z) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(r, Z) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(r \circ s, Z) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{id}_X, Z) = \text{id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)} \quad (6.1)$$

ist $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(r, Z) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(s, Z)^{-1}$ bijektiv, also r eine *J-lokale Retraktion*. $\square$

Lemma 6.8. Der Schnitt einer *J-lokalen Retraktion* ist *J-lokal*.

Beweis. Analog zum Beweis von Lemma (6.7). $\square$

Lemma 6.9. Ein *J-lokaler Morphismus*, dessen Domäne ein *J-lokales Objekt* ist, ist ein *Schnitt*. (Nach Lemma (6.7) ist dessen Retraktion *J-lokal*.)

Beweis. Sei $f: X \rightarrow Y$ J -lokal mit X J -lokal, dann ist $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ bijektiv, also insbesondere surjektiv. Daher gibt es einen Morphismus $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X)(g) = \text{id}_X$. $\square$

Lemma 6.10. *Ein J -lokaler Morphismus, dessen Kodomäne ein J -lokales Objekt ist, ist XXXX.*

Beweis. Sei $f: X \rightarrow Y$ J -lokal mit Y J -lokal, dann ist $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Y): \text{End}_{\mathcal{C}}(Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ bijektiv, also XXXX $\square$

Lemma 6.11. *Ein J -lokaler Morphismus zwischen J -lokalen Objekten ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Ein J -lokaler Morphismus $f: X \rightarrow Y$ zwischen J -lokalen Objekten X und Y hat (da $\text{dom}(f) = X$ J -lokal ist) nach Lemma (6.9) eine J -lokale Retraktion $g: Y \rightarrow X$. Da deren Domäne ein J -lokales Objekt ist, ist diese (da $\text{dom}(g) = Y$ J -lokal ist) nach Lemma (6.9) ebenso ein Schnitt und daher nach Korollar (XXXX) ein Isomorphismus. XXXX $\square$

Kapitel 7

(Ko)zusammenhängende Objekte

Die Definition von zusammenhängenden Räumen in der Topologie benutzt die offenen Mengen, ist aber äquivalent zu einer rein kategorientheoretischen Definition. Die Abbildung eines zusammenhängenden topologischen Raumes in einen anderen, muss wegen zusammenhängenden Bildes von ersterem über eine Zusammenhangskomponente des letzteren faktorisieren. Das Koprodukt von topologischen Räumen besteht als disjunkte Vereinigung insbesondere aus verschiedenen Zusammenhangskomponenten.

Definition 7.1 (Zusammenhängendes Objekt). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ wird ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, für welches der (kovariante) Funktor:*

$$X = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -): \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Set} \quad (7.1)$$

alle Koprodukte erhält, zusammenhängend genannt.

Beispiel 7.2. *In einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit initialem Objekt $0 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist dieses nicht zusammenhängend, da für Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ (für die ihr Koprodukt $X + Y$ existiert):*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, X + Y) = \{*\} \not\cong \{*\} + \{*\} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, X) + \text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, Y). \quad (7.2)$$

Lemma 7.3. *Zusammenhängende Limiten von zusammenhängenden Objekten sind zusammenhängend.*

Beweis. Sei $X: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ ein zusammenhängendes Diagramm (also $\mathcal{I}$ zusammenhängend) mit $X_i \in \text{Ob } \mathcal{C}$ zusammenhängend für jedes $i \in \text{Ob } \mathcal{C}$, für welches ein Limes existiert. Sei $(Y_j)_{j \in J}$ eine Familie, für welche ein Koprodukt existiert. Mit Gleichung (20.17) und XXXX ist:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}} \left(\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} X_i, \coprod_{j \in J} Y_j \right) &= \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{C}} \left(X_i, \coprod_{j \in J} Y_j \right) = \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} \coprod_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j) \\ &= \coprod_{j \in J} \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j) = \coprod_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}} \left(\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} X_i, Y_j \right), \end{aligned} \quad (7.3)$$

womit $\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} X_i$ zusammenhängend ist. □

Lemma 7.4. *Für einen Epimorphismus $f: X \twoheadrightarrow Y$ mit Y zusammenhängend ist X zusammenhängend.*

Beweis. Die durch Vorkomposition induzierte Abbildung f^* ist nach Korollar (3.17) injektiv. XXXX □

Definition 7.5 (Kozusammenhängendes Objekt). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ wird ein Objekt $Y \in \text{Ob}\mathcal{C}$, für welches der (kovariante) Funktor:*

$$\hat{Y} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y): \mathbb{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set} \quad (7.4)$$

alle Produkte in Koproduct umwandelt, kozusammenhängend genannt.

Beispiel 7.6. *In einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit terminalem Objekt $1 \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ist dieses nicht kozusammenhängend, da für Objekte $X, Y \in \text{Ob}\mathcal{C}$ (für die ihr Produkt $X \times Y$ existiert):*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, 1) = \{*\} \not\cong \{*\} + \{*\} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, 1) + \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, 1). \quad (7.5)$$

Lemma 7.7. *Zusammenhängende Kolimiten von kozusammenhängenden Objekten sind kozusammenhängend.*

Beweis. Sei $X: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein zusammenhängendes Diagramm (also $\mathcal{I}$ zusammenhängend) mit $X_i \in \text{Ob}\mathcal{C}$ kozusammenhängend für jedes $i \in \text{Ob}\mathcal{C}$, für welches ein Kolimes existiert. Sei $(Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ eine Familie, für welche ein Produkt existiert. Mit Gleichung (20.18) und XXXX ist:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i, \varprojlim_{j \in \mathcal{J}} Y_j\right) &= \varprojlim_{j \in \mathcal{J}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i, Y_j\right) = \varprojlim_{j \in \mathcal{J}} \prod_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j) \\ &= \prod_{i \in \mathcal{I}} \varprojlim_{j \in \mathcal{J}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j) = \prod_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X_i, \varprojlim_{j \in \mathcal{J}} Y_j\right), \end{aligned}$$

womit $\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} X_i$ kozusammenhängend ist. □

Lemma 7.8. *Für einen Monomorphismus $f: Y \hookrightarrow Z$ mit Y kozusammenhängend ist Z kozusammenhängend.*

Beweis. Die durch Nachkomposition induzierte Abbildung f_* ist nach Korollar (3.9) injektiv. XXXX □

7.1 Lokal zusammenhängende Objekte und Kategorien

Definition 7.9 (Lokal zusammenhängendes Objekt). *Ein Objekt, welches sich als Koproduct von zusammenhängenden Objekten darstellen lässt, wird lokal zusammenhängend genannt.*

Definition 7.10 (Lokal zusammenhängende Kategorie). *Eine Kategorie, in der jedes Objekt lokal zusammenhängend ist, also sich als Koproduct von zusammenhängenden Objekten darstellen lässt, wird lokal zusammenhängend genannt.*

Kapitel 8

(Ko)kompakte Objekte

Definition 8.1 (Kompaktes Objekt). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ wird ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, für welches der (kovariante) Funktor:*

$$X = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set} \quad (8.1)$$

alle gefilterten Kolimiten erhält, kompakt genannt.

Definition 8.2 (Kokompaktes Objekt). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ wird ein Objekt $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, für welches der (kovariante) Funktor:*

$$\hat{Y} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set} \quad (8.2)$$

alle gefilterten Limiten in gefilterte Kolimiten umwandelt, kokompakt genannt.

Teil II

Kategorielle Konstruktionen

Kapitel 9

Scheiben- und Koscheibenkategorien

Da Objekte keine eigene Struktur besitzen, können sie nur durch ihre Verbindungen zu anderen Objekten untersucht werden. Insbesondere können für ein Objekt sämtliche in es hinein- und hinausgehenden Morphismen untersucht werden, die selbst wiederum eine Kategorie bilden.

Definition 9.1 (Scheibenkategorie). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $Y \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ist $\mathbb{C}/Y$ mit:*

$$\text{Ob}(\mathbb{C}/Y) := \{f \in \text{Ar}\mathcal{C} \mid \text{cod}(f) = Y\} \quad (9.1)$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}/Y}(f: X \rightarrow Y, g: X' \rightarrow Y) := \{\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \mid f = g \circ \phi\} \quad (9.2)$$

die Scheibenkategorien.

Definition 9.2 (Koscheibenkategorie). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $Y \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ist $Y \backslash \mathbb{C}$ mit:*

$$\text{Ob}(Y \backslash \mathbb{C}) = \{f \in \text{Ar}\mathcal{C} \mid \text{dom}(f) = Y\} \quad (9.3)$$

$$\text{Hom}_{Y \backslash \mathbb{C}}(f: Y \rightarrow Z, g: Y \rightarrow Z') = \{\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z') \mid g = \phi \circ f\} \quad (9.4)$$

die Koscheibenkategorien.

Beispiel 9.3. *Es ist $\mathbf{Set}/\emptyset \cong \mathcal{T}$ die terminale Kategorie, da die leere Menge $\emptyset$ die einzige Menge mit einem Morphismus in die leere Menge $\emptyset$ ist.*

Beispiel 9.4. *Für einen topologischen Raum X ist die Kategorie $\mathbf{Cov}(X)$ der Überlagerungen von X eine volle Unterkategorie von $\mathbf{Top}/X$.*

Korollar 9.5. *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $Y \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ist id_Y ein initiales Objekt in $Y \backslash \mathbb{C}$ und ein terminales Objekt in $\mathbb{C}/Y$. Umgekehrt ist:*

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}/Y}(\text{id}_X, f) = \text{Sec}(f); \quad (9.5)$$

$$\text{Hom}_{Y \backslash \mathbb{C}}(g, \text{id}_X) = \text{Ret}(g). \quad (9.6)$$

Lemma 9.6. *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit initialem Objekt $0 \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ist:*

$$0 \backslash \mathbb{C} \cong \mathbb{C}. \quad (9.7)$$

Beweis. XXXX □

Lemma 9.7. *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit terminalem Objekt $1 \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ist:*

$$\mathbb{C}/1 \cong \mathbb{C}. \quad (9.8)$$

Beweis. XXXX □

Definition 9.8 (Punktierte Kategorie). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit terminalem Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:*

$$\mathbb{C}_* := 1 \backslash \mathcal{C} \quad (9.9)$$

dessen punktierte Kategorie.

$$-\backslash \mathcal{C}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat} \quad (9.10)$$

$$\mathcal{C}/-: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat} \quad (9.11)$$

Für eine Kategorie $\mathcal{C}$, Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einen Morphismus $f: X \rightarrow Y$ gibt durch Nachkomposition und Basiswechsel induzierte Funktoren auf Scheibenkategorien:

$$f_!: \mathcal{C}/X \rightarrow \mathcal{C}/Y, h \mapsto f \circ h, \phi \mapsto \phi \quad (9.12)$$

$$f^*: \mathcal{C}/Y \rightarrow \mathcal{C}/X, h \mapsto h^* = h \times_Y X, \phi \mapsto \phi^* \quad (9.13)$$

sowie durch Kobasiswechsel und Vorkomposition induzierte Funktoren auf Koscheibenkategorien:

$$f_*: X \backslash \mathcal{C} \rightarrow Y \backslash \mathcal{C}, i \mapsto i_* = h +_X Y, \psi \mapsto \psi_* \quad (9.14)$$

$$f^!: Y \backslash \mathcal{C} \rightarrow X \backslash \mathcal{C}, i \mapsto i \circ f, \psi \mapsto \psi \quad (9.15)$$

Die Morphismen ϕ^* bzw. ψ_* beim Basis- bzw. Kobasiswechsel kommen dabei durch die universelle Eigenschaft des Faser- bzw. Kofaserprodukt zustande:

$$\begin{array}{ccc} & X \times_Y B & \xrightarrow{f_2^*} B \\ & \downarrow \phi^* & \downarrow \phi \\ h'^* \left(X \times_Y A \right. & \xrightarrow{f_1^*} A & \left. \right) h' \\ & \downarrow h^* & \downarrow h \\ & X & \xrightarrow{f} Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & X & \xrightarrow{f} Y \\ & \downarrow i & \downarrow i_* \\ i' \left(A \right. & \xrightarrow{f_1^!} A +_X Y & \left. \right) i'_* \\ & \downarrow \psi & \downarrow \psi_* \\ & B & \xrightarrow{f_*^2} B +_X Y \end{array}$$

Offenbar ist $(\text{id}_X)_! = \mathcal{C}/X$ bzw. $(\text{id}_X)^! = X \backslash \mathcal{C}$ sowie $(g \circ f)_! = g_! \circ f_!$ bzw. $(g \circ f)^! = f^! \circ g^!$.

Aus den Lemmata (3.7), (3.15), (3.24) und (3.27) folgt direkt:

Korollar 9.9. *Ist f monisch bzw. episch bzw. eine Retraktion bzw. ein Schnitt, dann erhalten $f_!$ und $f^!$ jeweils Monomorphismen bzw. Epimorphismen bzw. Retraktionen bzw. Schnitte.*

Aus den Lemmata (3.8) und (3.28) folgt:

Korollar 9.10. *Erzeugt $f^!$ einen Monomorphismus bzw. Schnitt, dann ist f ein Monomorphismus bzw. Schnitt.*

Aus den Lemmata (3.15) und (3.25) folgt:

Korollar 9.11. *Erzeugt $f_!$ einen Epimorphismus bzw. Retraktion, dann ist f ein Epimorphismus bzw. Retraktion.*

Lemma 9.12. *Ist f monisch, dann ist $f_!$ volltreu und f^* erhält Monomorphismen.*

Beweis. I.): XXXX II.): Ist f monisch, dann ist nach Lemma (14.7) ebenso f_1^* monisch. Ist ϕ monisch, dann ist $f_1^* \circ \phi^* = \phi \circ f_2^*$ nach Lemma (3.7) monisch, womit ϕ^* nach Lemma (3.8) monisch ist. $\square$

Lemma 9.13. *Sind f und $f^*(\phi)$ jeweils Retraktionen, dann ist ϕ eine Retraktion.*

Beweis. Ist f eine Retraktion, dann ist nach Lemma (14.7) ebenso f_2^* eine Retraktion. Ist $\phi^* = f^*(\phi)$ eine Retraktion, dann ist $f_1^* \circ \phi^* = \phi \circ f_2^*$ nach Lemma (3.24) eine Retraktion, womit ϕ^* nach Lemma (3.25) eine Retraktion ist. $\square$

Lemma 9.14. *Ist f episch, dann erhält f_* Epimorphismen und $f^!$ ist volltreu.*

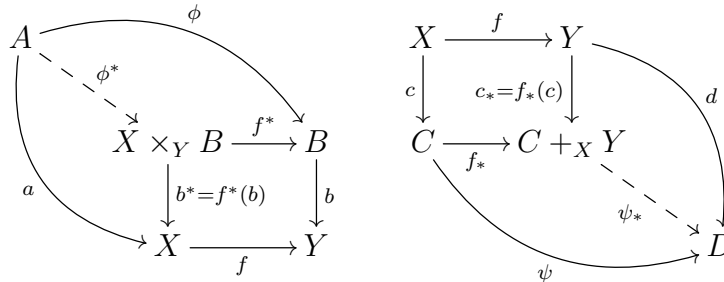
Beweis. I.): Ist f episch, dann ist nach Lemma (14.17) ebenso $f_1^!$ episch. Ist ψ episch, dann ist $\psi_* \circ f_1^! = f_2^! \circ \psi$ nach Lemma (3.15) episch, womit ψ_* nach Lemma (3.15) episch ist. II.): XXXX $\square$

Lemma 9.15. *Sind f und $f_*(\psi)$ jeweils Schnitte, dann ist ψ ein Schnitt.*

Beweis. Ist f ein Schnitt, dann ist nach Lemma (14.17) ebenso f_1^* ein Schnitt. Ist $\psi_* = f_*(\psi)$ ein Schnitt, dann ist $\psi_* \circ f_1^* = f_2^* \circ \psi$ nach Lemma (3.27) ein Schnitt, womit ψ nach Lemma (3.28) ein Schnitt ist. $\square$

Lemma 9.16. *Es gilt $f_! \dashv f^*$ und $f_* \dashv f^!$. Ist $\mathbb{C}$ eine Modellkategorie, so erhalten $f_!$ bzw. $f^!$ als Identitäten auf Morphismen jeweils (triviale) Kofaserungen bzw. (triviale) Faserungen, womit sich sogar Quillen-Adjunktionen ergeben.*

Beweis.



Seien $a: A \rightarrow X$ und $b: B \rightarrow Y$ sowie $c: X \rightarrow C$ und $d: Y \rightarrow D$, dann sind:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}/Y}(f_!a = f \circ a, b) \rightleftharpoons \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}/X}(a, f^*b), \phi \rightleftharpoons \phi^* \quad (9.16)$$

$$\mathrm{Hom}_{X \setminus \mathbb{C}}(c, f^!d = d \circ f) \rightleftharpoons \mathrm{Hom}_{Y \setminus \mathbb{C}}(f_*c, d), \psi \rightleftharpoons \psi^* \quad (9.17)$$

$\square$

Es gibt kanonische Vergissfunktoren:

$$U: \mathbb{C}/X \rightarrow \mathbb{C}, (A \rightarrow X) \mapsto A, \phi \mapsto \phi \quad (9.18)$$

$$V: X \setminus \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (X \rightarrow A) \mapsto A, \phi \mapsto \phi \quad (9.19)$$

Gibt es ein Nullobjekt Ω , dann gibt es darüber hinaus mit dem Nullmorphismus die Funktoren:

$$F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/X, A \mapsto \Omega_{A,X} = (A \xrightarrow{!} \Omega \xrightarrow{!} X), \phi \mapsto \phi \quad (9.20)$$

$$G: \mathbb{C} \rightarrow X \setminus \mathbb{C}, A \mapsto \Omega_{X,A} = (X \xrightarrow{!} \Omega \xrightarrow{!} A), \phi \mapsto \phi \quad (9.21)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}/X}(FA, FB) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}/X}(\Omega_{A,X}, \Omega_{B,X}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B) \quad (9.22)$$

$$\mathrm{Hom}_{X \setminus \mathbb{C}}(GA, GB) = \mathrm{Hom}_{X \setminus \mathbb{C}}(\Omega_{X,A}, \Omega_{X,B}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B) \quad (9.23)$$

Korollar 9.17. Für Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$, ein Objekt $c \in \text{Ob}\mathcal{C}$ sowie einen Funktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ gibt es induzierte Funktoren:

$$F_{/c}: \mathbb{C}/c \rightarrow \mathcal{D}/Fc, f \mapsto Ff, \phi \mapsto F\phi \quad (9.24)$$

$${}_c\backslash F: {}_c\backslash \mathbb{C} \rightarrow Fc\backslash \mathcal{D}, f \mapsto Ff, \phi \mapsto F\phi \quad (9.25)$$

Lemma 9.18. Ist F treu, dann sind $F_{/c}$ und ${}_c\backslash F$ treu. Ist F volltreu, dann sind $F_{/c}$ und ${}_c\backslash F$ volltreu.

Beweis. Seien $x: X \rightarrow C$ und $y: Y \rightarrow C$ Objekte in $\mathbb{C}/C$ sowie $x': C \rightarrow X'$ und $y': C \rightarrow Y'$ Objekte in $C\backslash \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{C}/C}(x, y) & \xrightarrow{F_{/C, X, Y}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}/Fc}(Fx, Fy) \\ \downarrow T & & \downarrow U \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{F_{X, Y}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY) \\ \\ \text{Hom}_{C\backslash \mathbb{C}}(x', y') & \xrightarrow{{}_C\backslash F_{X', Y'}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}\backslash \mathcal{D}}(Fx', Fy') \\ \downarrow V & & \downarrow W \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{F_{X', Y'}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX', FY') \end{array}$$

I.): Ist $F_{X, Y}$ injektiv, dann ist $UF_{/C, X, Y} = F_{X, Y}T$ injektiv, womit $F_{/C, X, Y}$ injektiv ist. Ist $F_{X, Y}$ injektiv, dann ist $W_{C\backslash F_{X, Y}} = F_{X, Y}V$ injektiv, womit ${}_C\backslash F_{X, Y}$ injektiv ist. II.): XXXX $\square$

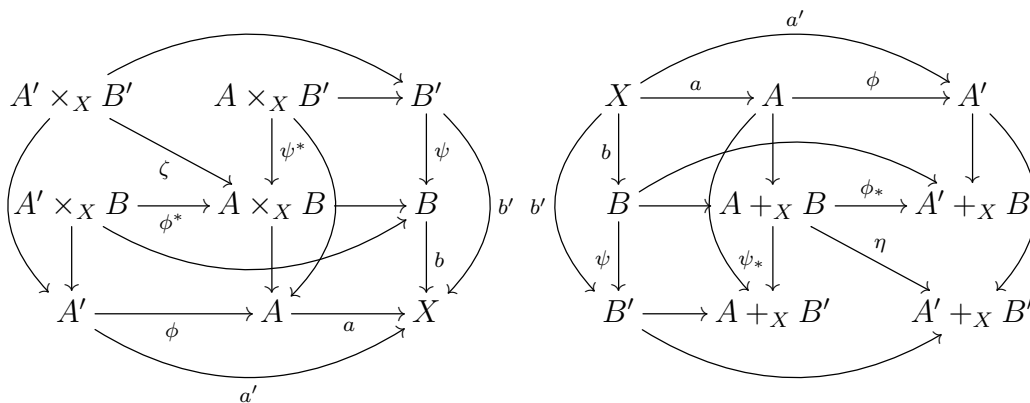
Für eine weitere Kategorie $\mathcal{E}$ und einen weiteren Funktor $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ ist:

$$(G \circ F)_{/c} = G_{/Fc} \circ F_{/c}: \mathbb{C}/c \rightarrow \mathcal{D}/Fc \rightarrow \mathcal{E}/GFc \quad (9.26)$$

$${}_c\backslash (G \circ F) = {}_c\backslash G \circ {}_c\backslash F: {}_c\backslash \mathbb{C} \rightarrow Fc\backslash \mathcal{D} \rightarrow GFc\backslash \mathcal{E} \quad (9.27)$$

9.1 Paarung in Scheibenkategorien

Faser- bzw. Kofaserprodukte kombinieren jeweils zwei Morphismen mit gleicher Kodomäne bzw. Domäne zu einem Morphismus (der diagonalen Komposition) mit der gleichen Kodomäne bzw. Domäne. Dies ergibt für Scheiben- und Koscheibenkategorien jeweils Paarungen.



Für die Scheibenkategorie ergibt sich ein kovarianter Funktor¹ $\langle -, - \rangle: \mathbb{C}/X \times \mathbb{C}/X \rightarrow \mathbb{C}/X$ durch die Festlegungen:

$$\langle a, b \rangle := (A \times_X B \rightarrow X) \quad (9.28)$$

$$\langle \phi, b \rangle := \phi^*: A' \times_X B \rightarrow A \times_X B \text{ entspricht } \langle a', b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle \quad (9.29)$$

$$\langle a, \psi \rangle := \psi^*: A \times_X B' \rightarrow A \times_X B \text{ entspricht } \langle a, b' \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle \quad (9.30)$$

$$\langle \phi, \psi \rangle := \zeta: A' \times_X B' \rightarrow A \times_X B \text{ entspricht } \langle a', b' \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle \quad (9.31)$$

Für die Koscheibenkategorie ergibt sich ein kovarianter Funktor² $\langle -, - \rangle: (X \setminus \mathbb{C})^{\text{op}} \times (X \setminus \mathbb{C})^{\text{op}} \rightarrow X \setminus \mathbb{C}$ durch die Festlegungen:

$$\langle a, b \rangle := (X \rightarrow A +_X B) \quad (9.32)$$

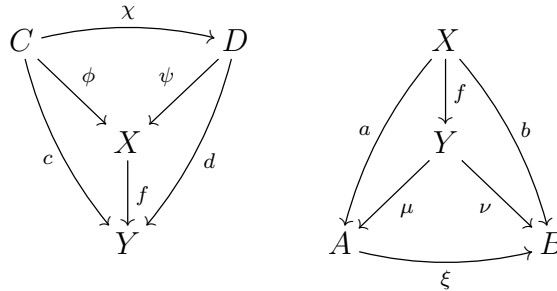
$$\langle \phi, b \rangle := \phi_*: A +_X B \rightarrow A' +_X B \text{ entspricht } \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a', b \rangle \quad (9.33)$$

$$\langle a, \psi \rangle := \psi_*: A +_X B \rightarrow A +_X B' \text{ entspricht } \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b' \rangle \quad (9.34)$$

$$\langle \phi, \psi \rangle := \eta: A +_X B \rightarrow A' +_X B' \text{ entspricht } \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a', b' \rangle \quad (9.35)$$

9.2 Doppelscheibenkategorien

Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ein Objekt von $X \setminus \mathbb{C}$ sowie $\mathbb{C}/Y$, daher können die Doppelscheibenkategorien $f \setminus (X \setminus \mathbb{C})$ und $(\mathbb{C}/Y)/f$ betrachtet werden.



$$\text{Hom}_{f \setminus (X \setminus \mathbb{C})}(\mu, \nu) \cong \text{Hom}_{Y \setminus \mathbb{C}}(\mu, \nu) \xrightarrow{f \text{ epi}} \text{Hom}_{X \setminus \mathbb{C}}(a, b) \quad (9.36)$$

$$\text{Hom}_{(\mathbb{C}/Y)/f}(\phi, \psi) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}/X}(\phi, \psi) \xrightarrow{f \text{ mono}} \text{Hom}_{\mathbb{C}/Y}(c, d) \quad (9.37)$$

Neben den kanonischen Vergissfunktoren $U: f \setminus (X \setminus \mathbb{C}) \rightarrow X \setminus \mathbb{C}$ und $V: (\mathbb{C}/Y)/f \rightarrow \mathbb{C}/Y$ aus den Gleichungen (XXXX) und (XXXX) gibt es darüber hinaus kanonische Vergissfunktoren:

$$U': f \setminus (X \setminus \mathbb{C}) \rightarrow Y \setminus \mathbb{C}, (\mu: f \rightarrow a) \mapsto (\mu: C \rightarrow X), \xi \mapsto \xi \quad (9.38)$$

$$V': (\mathbb{C}/Y)/f \rightarrow \mathbb{C}/X, (\phi: c \rightarrow f) \mapsto (\phi: Y \rightarrow A), \chi \mapsto \chi \quad (9.39)$$

mit $f^! \circ U' = U$ und $f_! \circ V' = V$.

¹Die Erfüllung der Funktoreigenschaften folgt aus der Eindeutigkeit des universellen Morphismus des Faserproduktes.

²Die Erfüllung der Funktoreigenschaften folgt aus der Eindeutigkeit des universellen Morphismus des Kofaserproduktes.

Kapitel 10

Klassen und Kategorien der Elemente

Der Begriff des Elementes einer Menge lässt sich nicht direkt auf die Kategorientheorie verallgemeinern, da Objekte über keine weitere Struktur verfügen. Für eine Menge X entspricht jedes Element $x \in X$ jedoch eindeutig einer Abbildung $1 \rightarrow X, \emptyset \mapsto x$ aus der initialen (eielementigen) Menge $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$ in die Menge X .

Definition 10.1 (Globales Element). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit initialem Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist ein Morphismus $1 \rightarrow X$ ein globales Element von X .*

Definition 10.2 (Klasse der Elemente). *Die Morphismen in $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ werden auch X -wertige Punkte von Y genannt. Die Klasse:*

$$\text{El}(Y) := \bigcup_{X \in \text{Ob } \mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \quad (10.1)$$

ist die Klasse der Elemente von Y .

Offenbar ist $\forall Y \in \text{Ob } \mathcal{C}: \text{id}_Y \in \text{El}(Y)$.

Definition 10.3 (Kategorie der Elemente, kovariant). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und einen kovarianten Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ ist $\text{El}(F)$ mit:*

$$\text{Ob}(\text{El}(F)) := \{(C, x) | C \in \text{Ob } \mathcal{C}, x \in FC\} \quad (10.2)$$

$$\text{Hom}_{\text{El}(F)}((C, x), (C', x')) := \{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') | F(f)(x) = x'\} \quad (10.3)$$

die Kategorie der Elemente von F .

Für die Kategorie der Elemente von F wird auch:

$$\int^{\mathcal{C}} F = \int^{X: \mathcal{C}} FX := \text{El}(F) \quad (10.4)$$

geschrieben.

Definition 10.4 (Kategorie der Elemente, kontravariant). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und einen kontravarianten Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ ist $\text{El}(F)$ mit:*

$$\text{Ob}(\text{El}(F)) := \{(C, x) | C \in \text{Ob } \mathcal{C}, x \in FC\} \quad (10.5)$$

$$\text{Hom}_{\text{El}(F)}((C, x), (C', x')) := \{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') | F(f)(x') = x\} \quad (10.6)$$

die Kategorie der Elemente von F .

Für die Kategorie der Elemente von F wird auch:

$$\int_{\mathbb{C}} F = \int_{X:\mathbb{C}} FX := \text{El}(F) \quad (10.7)$$

geschrieben.

Beispiel 10.5. Die Kategorie der Elemente des Identitätsfunktors $\mathbf{Set}$ auf $\mathbf{Set}$ ist die punktierte Kategorie $\mathbf{Set}_*$:

$$\text{El}_{\mathbf{Set}} \cong \mathbf{Set}_*. \quad (10.8)$$

Lemma 10.6. Koscheibenkategorien lokal kleiner Kategorien sind spezielle Kategorien der Elemente. Für eine lokal kleine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:

$$\text{El Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) = X \backslash \mathbb{C}. \quad (10.9)$$

Beweis. XXXX

$$\text{Ob El Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) = \{(Y, f) | X \in \text{Ob } \mathcal{C}, f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)\} = \text{Ob}(X \backslash \mathbb{C}) \quad (10.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{El Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)}((Y, f), (Y', f')) &= \{\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y') | \phi \circ f = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \phi)(f) = f'\} \\ &= \text{Hom}_{X \backslash \mathbb{C}}((Y, f), (Y', f')) \end{aligned} \quad (10.11)$$

□

Lemma 10.7. Scheibenkategorien lokal kleiner Kategorien sind spezielle Kategorien der Elemente. Für eine lokal kleine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:

$$\text{El Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) = \mathbb{C}/Y. \quad (10.12)$$

Beweis. XXXX

$$\text{Ob El Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) = \{(X, f) | X \in \text{Ob } \mathcal{C}, f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)\} = \text{Ob}(\mathbb{C}/Y) \quad (10.13)$$

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{El Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)}((X, f), (X', f')) &= \{\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') | f' \circ \phi = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\phi, Y)(f) = f\} \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{C}/Y}((X, f), (X', f')) \end{aligned} \quad (10.14)$$

□

Lemma 10.8. Ein kovarianter Funktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ ist genau dann darstellbar, wenn $\text{El}(F)$ ein initiales Objekt besitzt.

Beweis. XXXX

□

Lemma 10.9. Ein kontravarianter Funktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ ist genau dann darstellbar, wenn $\text{El}(F)$ ein terminales Objekt besitzt.

Beweis. XXXX

□

Kapitel 11

Globaler Schnittfunktor

Definition 11.1 (Globaler Schnittfunktor). *Für eine lokal kleine Kategorie $\mathcal{C}$ mit terminalem Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist der kovariante Funktor:*

$$\Gamma := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set} \quad (11.1)$$

der globale Schnittfunktor, welcher insbesondere einem Objekt die Menge seiner globalen Elemente zuordnet.

Beispiel 11.2. *Für $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ ist $\Gamma =: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$.*

Die Kategorie der Elemente des globalen Schnittfunktors ist mit Definition (11.1), Lemma (10.6) und Definition (9.8) die punktierte Kategorie:

$$\text{El } \Gamma = \text{El } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, -) = 1 \backslash \mathcal{C} = \mathcal{C}_*. \quad (11.2)$$

Ein Vorteil der Kategorie $\mathbf{Set}$ der Mengen ist, dass sich jede Menge als Koprodukt (disjunkte Vereinigung) von terminalen Objekten (einelementigen Mengen) mit ihr selbst als Indexmenge darstellen lässt. In allgemeineren Kategorien mit terminalem Objekt lässt sich dieses Vorgehen analog übertragen.

Beispiel 11.3. *Für $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ ist $\Delta =: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$.*

Kapitel 12

Kommakategorien

Definition 12.1 (Kommakategorie). Für Kategorien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathbb{C}$ und Funktoren F, G mit:

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathbb{C} \xleftarrow{G} \mathcal{B}, \quad (12.1)$$

ist die Kategorie $(F \downarrow G)$ mit:

- I.) Tripeln (α, β, f) mit $\alpha \in \text{Ob } \mathcal{A}$, $\beta \in \text{Ob } \mathcal{B}$ und $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(F\alpha, G\beta)$ als Objekten
- II.) für $(\alpha, \beta, f), (\alpha', \beta', f') \in \text{Ob}(F \downarrow G)$ Tupeln (g, h) mit $g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha, \alpha')$ und $h \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\beta, \beta')$, sodass:

$$f' \circ Fg = Gh \circ f, \quad (12.2)$$

also sodass das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} F\alpha & \xrightarrow{Fg} & F\alpha' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ G\beta & \xrightarrow{Gh} & G\beta' \end{array}$$

kommutiert, als Morphismen,

die Kommakategorie.

Für eine solche Kommakategorie $(F \downarrow G)$ gibt es Vergissfunktoren:

$$(F \downarrow G) \rightarrow \mathcal{A}, (\alpha, \beta, f) \mapsto \alpha, (g, h) \mapsto g \quad (12.3)$$

$$(F \downarrow G) \rightarrow \mathcal{B}, (\alpha, \beta, f) \mapsto \beta, (g, h) \mapsto h \quad (12.4)$$

12.1 Pfeilkategorien

Definition 12.2 (Pfeilkategorie). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist:

$$\mathbb{C}^{\rightarrow} := (\mathcal{C} \downarrow \mathcal{C}) \quad (12.5)$$

ihre Pfeilkategorie. Das entsprechende Diagramm ist:

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbb{C} \xleftarrow{\mathcal{C}} \mathbb{C} \quad (12.6)$$

Nun gibt es für eine Kommakategorie $(F \downarrow G)$ gibt es nun einen weiteren Vergissfunktoren:

$$(F \downarrow G) \rightarrow \mathbb{C}^{\rightarrow}, (\alpha, \beta, f) \mapsto f, (g, h) \mapsto (Fg, Gh) \quad (12.7)$$

12.2 Kategorie der Objekte unter X

Definition 12.3 (Kategorie der Objekte unter X). Für die terminale Kategorie $\mathcal{T}$, eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit einem Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einem Funktor $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}$ mit $X = F(T)$ ist:

$$(X \downarrow \mathcal{C}) := (F \downarrow_{\mathcal{C}}) \quad (12.8)$$

die Kategorie der Objekte unter X . Das entsprechende Diagramm ist:

$$\mathcal{T} \xrightarrow{F} \mathcal{C} \xleftarrow{\mathcal{C}} \mathcal{C} \quad (12.9)$$

(X, id_X) ist ein initiales Objekt von $(X \downarrow \mathcal{C})$. Ist X bereits ein initiales Objekt von $\mathcal{C}$, so ist $(X \downarrow \mathcal{C}) \cong \mathcal{C}$.

12.3 Kategorie der Objekte über X

Definition 12.4 (Kategorie der Objekte über X). Für die terminale Kategorie $\mathcal{T}$, eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit einem Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einen Funktor $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}$ und $X = F(T)$ ist:

$$(\mathcal{C} \downarrow X) := (\mathcal{C} \downarrow F) \quad (12.10)$$

die Kategorie der Objekte über X . Das entsprechende Diagramm ist:

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{C} \xleftarrow{F} \mathcal{T} \quad (12.11)$$

X ist ein terminales Objekt von $(\mathcal{C} \downarrow X)$. Ist X bereits ein terminales Objekt von $\mathcal{C}$, so ist $(\mathcal{C} \downarrow X) \cong \mathcal{C}$.

Kapitel 13

Produkte und Koprodukte

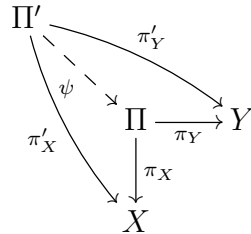
13.1 Produkte von Objekten

Das kartesische Produkt in der Mengenlehre ordnet zwei oder mehr Mengen eine gemeinsame Menge zu. Die Definition gibt diese explizit an, eine alternative Konstruktion durch eine *universelle Eigenschaft* ermöglicht es das Produkt ebenso für allgemeine Kategorien zu betrachten.

Definition 13.1 (Produkt zweier Objekte). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist ein Objekt $\Pi \in \text{Ob } \mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $\pi_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi, X)$ und $\pi_Y \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi, Y)$, den Projektionsmorphismen, sodass:*

$$\forall \Pi' \in \text{Ob } \mathcal{C} \forall \pi'_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi', X), \pi'_Y \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi', Y) \exists! \psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi', \Pi) : \quad \pi'_X = \pi_X \circ \psi \wedge \pi'_Y = \pi_Y \circ \psi \quad (13.1)$$

also für die das Diagramm:



kommutiert, ein Produkt von X und Y .

Bemerkung 13.2. *Für $\Pi' = \Pi$, $\pi'_X = \pi_X$ und $\pi'_Y = \pi_Y$ ist $\psi = \text{id}_{\Pi}$ der universelle Morphismus.*

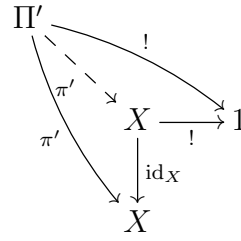
Das Produkt zweier Objekte ist nicht eindeutig.

In der Kategorie der Mengen sind $\pi_X: X \times Y \rightarrow X, (x, y) \mapsto x$ und $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y, (x, y) \mapsto y$ die Projektionsmorphismen.

Lemma 13.3. *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit terminalen Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$:*

$$X \times 1 \cong 1 \times X \cong X. \quad (13.2)$$

Beweis. Das folgt aus dem kommutativen Diagramm:



□

Lemma 13.4. *Das Produkt ist assoziativ und kommutativ bis auf Isomorphie. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und Objekte $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:*

$$(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z); \quad (13.3)$$

$$X \times Y \cong Y \times X. \quad (13.4)$$

Beweis. Die Kommutativität folgt direkt aus Definition (13.2). XXXX

□

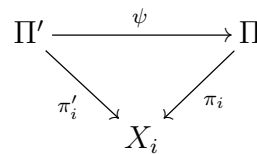
XXXX

Aufgrund der Assoziativität des Produktes zweier Objekte nach Lemma (13.4) lassen sich induktiv Produkte von endlich vielen Objekten definieren. Die universelle Eigenschaft von Definition (13.1) für zwei Objekte lässt sich jedoch ebenso für beliebige Familien von Objekten betrachten.

Definition 13.5 (Produkt mehrerer Objekte). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$, eine Indexmenge I und eine Familie $(X_i)_{i \in I} \in \text{Ob } \mathcal{C}$ von Objekten ist ein Objekt $\Pi \in \text{Ob } \mathcal{C}$ zusammen mit Projektionsmorphisamen $\pi_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi, X_i)$, für die:*

$$\forall \Pi' \in \text{Ob } \mathcal{C} \forall \pi'_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi', X_i) \exists ! \psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi', \Pi) \forall i \in I: \pi'_i = \pi_i \circ \psi \quad (13.5)$$

also die das Diagramm:



kommutieren lassen, ein Produkt von $(X_i)_{i \in I}$.

Bemerkung 13.6. *Für $\Pi' = \Pi$ und $\pi'_i = \pi_i$ für alle $i \in I$ ist $\psi = \text{id}_{\Pi}$ der universelle Morphismus.*

Bemerkung 13.7. *Für die leere Menge als Indexmenge wird das leere Produkt geschrieben als:*

$$\prod_{\emptyset} () \quad (13.6)$$

und ist (falls existent) isomorph zum terminalen Objekt.

Das Produkt mehrerer Objekte ist nicht eindeutig, jedoch gilt:

Lemma 13.8. *Je zwei Produkte einer Familie von Objekten sind isomorph.*

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $(X_i)_{i \in I} \in \text{Ob } \mathcal{C}$ eine Familie an Objekten und $\Pi, \Pi' \in \text{Ob } \mathcal{C}$ zwei Produkte von ihnen mit entsprechenden Projektionsmorphisms von diesen. Per Definition gibt es genau ein $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi', \Pi)$ mit $\forall i \in I: \pi'_i = \pi_i \circ \psi$ und genau ein $\psi' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi, \Pi')$ mit $\forall i \in I: \pi_i = \pi'_i \circ \psi'$, womit:

$$\forall i \in I: \pi_i = \pi_i \circ \psi \circ \psi' \quad (13.7)$$

und die Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \Pi & \xrightarrow{\text{id}_{\Pi}, \psi \circ \psi'} & \Pi \\ & \searrow \pi_i \quad \swarrow \pi_i & \\ & X_i & \end{array}$$

kommutieren. Aufgrund der Eindeutigkeit des entsprechenden Morphismus zwischen den Produkten per Definition gilt $\text{id}_{\Pi} = \psi \circ \psi'$ und umgekehrt auch $\text{id}_{\Pi'} = \psi' \circ \psi$. $\square$

Das Produkt wird aufgrund dieser Eindeutigkeit bis auf Isomorphie auch als:

$$\Pi = \prod_{i \in I} X_i \quad (13.8)$$

geschrieben.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \prod_{i \in I} Y_i) & \xrightarrow{\quad} & \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_i) \\ & \searrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \pi_i) \quad \swarrow \pi'_i & \\ & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_i) & \end{array}$$

Lemma 13.9. *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$, eine Indexmenge I , eine Familie $(Y_i)_{i \in I} \in \text{Ob } \mathcal{C}$ von Objekten und ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X, \prod_{i \in I} Y_i\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_i). \quad (13.9)$$

Beweis.

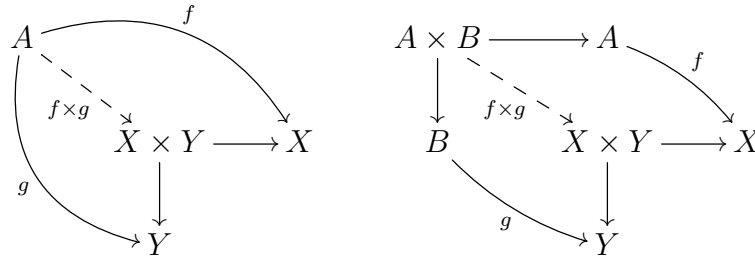
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \prod_{i \in I} Y_i) \\ & \searrow \pi'_i \quad \swarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \pi_i) & \\ & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_i) & \end{array}$$

Seien A eine Menge und $\pi'_i: A \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_i)$ eine Familie von Abbildungen von Mengen, dann ergibt sich für jedes Element $a \in A$ eine Familie $\pi'_i(a): X \rightarrow Y_i$ von Morphismen. Nach der universellen Eigenschaft des Produktes gibt es genau einen universellen Morphismus $\psi(a): X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ mit $\pi'_i(a) = \pi_i \circ \psi(a)$. Es gibt daher genau eine Abbildung $\psi: A \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \prod_{i \in I} Y_i)$, $a \mapsto \psi(a)$ mit $\pi'_i = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \pi_i) \circ \psi$. $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \prod_{i \in I} Y_i)$ erfüllt daher die Eigenschaft des Produktes der Familie $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_i)$, womit die Behauptung nach Lemma (13.8) folgt. $\square$

13.2 Produkte von Morphismen

In der Definition (13.1) des Produktes zweier Objekte wird der (eindeutige) universelle Morphismus ψ von den beiden Morphismen π'_X und π'_Y induziert und kann daher sinnvoller als $\pi'_X \times \pi'_Y$ bezeichnet werden.

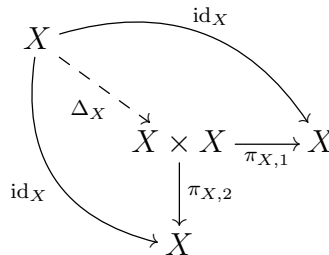
Das bedeutet, dass Morphismen $f: A \rightarrow X$ und $g: A \rightarrow Y$ zu einem gemeinsamen Morphismus $f \times g: A \rightarrow X \times Y$ kombiniert werden können¹. In der Kategorie **Set** der Mengen ist diese Abbildung gegeben durch $a \mapsto (f(a), g(a))$. Für den Spezialfall der Projektionsmorphisimen $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ und $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ folgt nach Bemerkung (13.2), dass $\pi_X \times \pi_Y = \text{id}_{X \times Y}: X \times Y \rightarrow X \times Y$.



Ein spezielles Produkt zweier Morphismen ist das zweier Identitätsmorphisimen. Für ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ sei:

$$\Delta_X := \text{id}_X \times \text{id}_X: X \rightarrow X \times X, \quad (13.10)$$

der *Diagonalmorphismus*, welcher ein Schnitt (Rechtsinverses) ist, wie das Diagramm:



zeigt, und daher nach Lemma (3.33) insbesondere monisch ist.

Lemma 13.10. *Für einen Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$f \times f \cong \Delta_Y \circ f. \quad (13.11)$$

Beweis. XXXX □

Lemma 13.11. *Für Morphismen $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$ und $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$ sowie $g_1: Y_1 \rightarrow Z_1$ und $g_2: Y_2 \rightarrow Z_2$ ist:*

$$(g_1 \times g_2) \circ (f_1 \times f_2) = (g_1 \circ f_1) \times (g_2 \circ f_2). \quad (13.12)$$

Beweis. XXXX □

¹ A ist dabei Π' , $X \times Y$ ist Π , f ist π'_X und g ist π'_Y im Vergleich mit Definition (13.1).

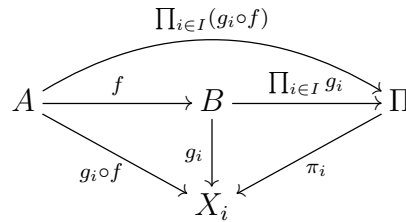
Für den Spezialfall der Projektionsmorphisimen $\pi_i: \Pi \rightarrow X_i$ folgt nach Bemerkung (13.6), dass:

$$\prod_{i \in I} \pi_i = \text{id}_\Pi: \Pi \rightarrow \Pi. \quad (13.13)$$

Lemma 13.12. *Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten, $\Pi = \prod_{i \in I} X_i$ ihr Produkt und $(\pi_i: \Pi \rightarrow X_i)_{i \in I}$ die Familie der dazugehörigen Projektionsmorphisimen. Sei $(g_i: B \rightarrow X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Morphismen und einen Morphismus $f: A \rightarrow B$ ist:*

$$\prod_{i \in I} (g_i \circ f) \cong \left(\prod_{i \in I} g_i \right) \circ f. \quad (13.14)$$

Beweis. Beide Morphismen treten als universeller Morphismus der Familie $(g_i \circ f: A \rightarrow X_i)_{i \in I}$ auf und sind daher aufgrund der universellen Eigenschaft isomorph:



□

Durch Kombination von Gleichung (13.13) und Lemma (13.12) zeigt sich, dass jeder Morphismus $h: C \rightarrow \Pi$ in ein Produkt (bis auf Isomorphie) selbst als Produkt dargestellt werden kann:

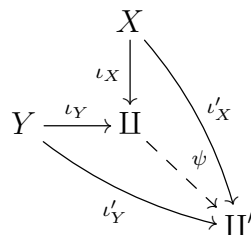
$$h = \text{id}_\Pi \circ h = \left(\prod_{i \in I} \pi_i \right) \circ h \cong \prod_{i \in I} (\pi_i \circ h). \quad (13.15)$$

13.3 Koprodukte von Objekten

Definition 13.13 (Koprodukt zweier Objekte). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist ein Objekt $\Pi \in \text{Ob } \mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $\iota_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \Pi)$ und $\iota_Y \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \Pi)$, den Einbettungsmorphismen, sodass:*

$$\begin{aligned}
 \forall \Pi' \in \text{Ob } \mathcal{C} \forall \iota'_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \Pi'), \iota'_Y \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \Pi') \exists! \psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi, \Pi'): \\
 \iota'_X = \psi \circ \iota_X \wedge \iota'_Y = \psi \circ \iota_Y
 \end{aligned} \quad (13.16)$$

also für die das Diagramm:



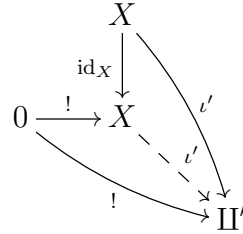
kommutiert, ein Koprodukt von X und Y .

Bemerkung 13.14. Für $\Pi' = \Pi$, $\iota'_X = \iota_X$ und $\iota'_Y = \iota_Y$ ist $\psi = \text{id}_\Pi$ der universelle Morphismus.

Lemma 13.15. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit initialem Objekt $0 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$:

$$X + 0 \cong 0 + X \cong X. \quad (13.17)$$

Beweis. Das folgt aus dem kommutativen Diagramm:



□

Lemma 13.16. Das Koprodukt ist assoziativ und kommutativ bis auf Isomorphie. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und Objekte $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:

$$(X + Y) + Z \cong X + (Y + Z); \quad (13.18)$$

$$X + Y \cong Y + X. \quad (13.19)$$

Beweis. Die Kommutativität folgt direkt aus Definition (13.14). XXXX

□

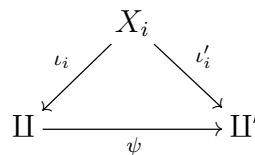
XXXX

Aufgrund der Assoziativität des Koproduktes zweier Objekte nach Lemma (13.16) lassen sich induktiv Koprodukte von endlich vielen Objekten definieren. Die universelle Eigenschaft von Definition (13.13) für zwei Objekte lässt sich jedoch ebenso für beliebige Familien von Objekten betrachten.

Definition 13.17 (Koprodukt mehrerer Objekte). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$, eine Indexmenge I und eine Familie $(X_i)_{i \in I} \in \text{Ob } \mathcal{C}$ von Objekten ist ein Objekt $\Pi \in \text{Ob } \mathcal{C}$ zusammen mit Einbettungsmorphismen $i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, \Pi)$, für die:

$$\forall \Pi' \in \text{Ob } \mathcal{C} \forall \iota'_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, \Pi') \exists ! \psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi, \Pi') \forall i \in I: \iota'_i = \psi \circ \iota_i \quad (13.20)$$

also die das Diagramm:



kommutieren lassen, ein Koprodukt von $(X_i)_{i \in I}$.

Bemerkung 13.18. Für $\Pi' = \Pi$ und $\iota'_i = \iota_i$ für alle $i \in I$ ist $\psi = \text{id}_\Pi$ der universelle Morphismus.

Bemerkung 13.19. Für die leere Menge als Indexmenge wird das leere Koprodukt geschrieben als:

$$\coprod_{\emptyset}() \quad (13.21)$$

und ist (falls existent) isomorph zum initialen Objekt.

Das Koprodukt ist nicht eindeutig, jedoch gilt:

Lemma 13.20. Je zwei Koprodukte einer Familie von Objekten sind isomorph.

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $(X_i)_{i \in I} \in \text{Ob } \mathcal{C}$ eine Familie an Objekten und $\Pi, \Pi' \in \text{Ob } \mathcal{C}$ zwei Koprodukte von ihnen mit entsprechenden Einbettungsmorphismen von diesen. Per Definition gibt es genau ein $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi, \Pi')$ mit $\forall i \in I: \iota'_i = \psi \circ \iota_i$ und genau ein $\psi' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi', \Pi)$ mit $\forall i \in I: \iota_i = \psi' \circ \iota'_i$, womit:

$$\forall i \in I: \iota_i = \psi' \circ \psi \circ \iota_i \quad (13.22)$$

und die Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & X_i & \\ \iota_i \swarrow & & \searrow \iota_i \\ \Pi & \xrightarrow{\text{id}_{\Pi}, \psi' \circ \psi} & \Pi \end{array}$$

kommutieren. Aufgrund der Eindeutigkeit des entsprechenden Morphismus zwischen den Produkten per Definition gilt $\text{id}_{\Pi} = \psi' \circ \psi$ und umgekehrt auch $\text{id}_{\Pi'} = \psi \circ \psi'$. $\square$

Das Koprodukt wird aufgrund dieser Eindeutigkeit bis auf Isomorphie auch als:

$$\Pi = \coprod_{i \in I} X_i \quad (13.23)$$

geschrieben. Stimmt für eine Familie an Objekten ihr Produkt und Koprodukt überein wird es auch *Biprodukt* genannt.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\coprod_{i \in I} X_i, Y) & \xrightarrow{\quad} & \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y) \\ & \searrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\iota_i, Y) & \swarrow \pi'_i \\ & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y) & \end{array}$$

Lemma 13.21. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$, eine Indexmenge I , eine Familie $(X_i)_{i \in I} \in \text{Ob } \mathcal{C}$ von Objekten und ein Objekt $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\coprod_{i \in I} X_i, Y\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y). \quad (13.24)$$

Beweis.

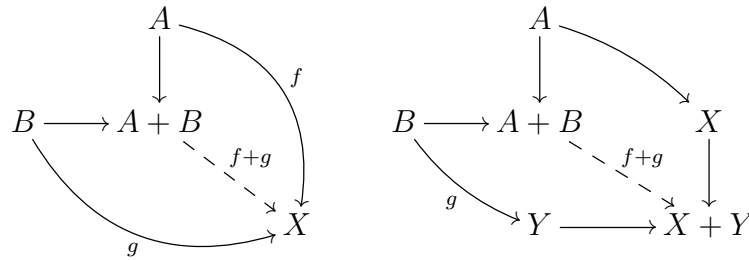
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\coprod_{i \in I} X_i, Y) \\ & \searrow \pi'_i & \swarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\iota_i, Y) \\ & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y) & \end{array}$$

Seien A eine Menge und $\pi'_i: A \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y)$ eine Familie von Abbildungen von Mengen, dann ergibt sich für jedes Element $a \in A$ eine Familie $\pi'_i(a): X_i \rightarrow Y$ von Morphismen. Nach der universellen Eigenschaft des Koproduktes gibt es genau einen universellen Morphismus $\psi(a): \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow Y$ mit $\pi'_i(a) = \psi(a) \circ \iota_i$. Es gibt daher genau eine Abbildung $\psi: A \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\coprod_{i \in I} X_i, Y)$, $a \mapsto \psi(a)$ mit $\pi'_i = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\iota_i, Y) \circ \psi$. $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\coprod_{i \in I} X_i, Y)$ erfüllt daher die Eigenschaft des Produktes der Familie $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y)$, womit die Behauptung nach Lemma (13.8) folgt. $\square$

13.4 Koprodukte von Morphismen

In der Definition (13.13) des Koproduktes zweier Objekte wird der (eindeutige) universelle Morphismus ψ von den beiden Morphismen ι'_X und ι'_Y induziert und kann daher sinnvoller als $\iota'_X + \iota'_Y$ bezeichnet werden.

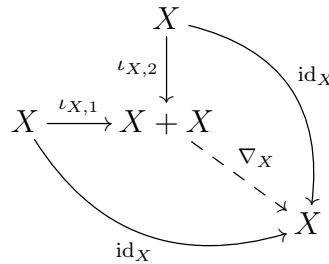
Das bedeutet, dass Morphismen $f: X \rightarrow A$ und $g: Y \rightarrow A$ zu einem gemeinsamen Morphismus $f + g: X + Y \rightarrow A$ kombiniert werden können². In der Kategorie **Set** der Mengen ist diese Abbildung gegeben durch $z \mapsto f(z)$ für $z \in X$ und $z \mapsto g(z)$ für $z \in Y$. Für den Spezialfall der Einbettungsmorphismen $\iota_X: X \rightarrow X + Y$ und $\iota_Y: Y \rightarrow X + Y$ folgt nach Bemerkung (13.14), dass $\iota_X + \iota_Y = \text{id}_{X+Y}: X + Y \rightarrow X + Y$.



Ein spezielles Koprodukt zweier Morphismen ist das zweier Identitätsmorphismen. Für ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ sei:

$$\nabla_X := \text{id}_X + \text{id}_X: X + X \rightarrow X, \quad (13.25)$$

der *Kodiagonalmorphismus*, welcher eine Retraktion (Linksinverses) ist, wie das Diagramm:



zeigt, und daher nach Lemma (3.30) insbesondere episch ist.

Lemma 13.22. *Für einen Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$f \times f \cong f \circ \nabla_X. \quad (13.26)$$

² A ist dabei Π' , $X + Y$ ist Π , f ist ι'_X und g ist ι'_Y im Vergleich mit Definition (13.13).

Beweis. XXXX □

Lemma 13.23. Für Morphismen $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$ und $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$ sowie $g_1: Y_1 \rightarrow Z_1$ und $g_2: Y_2 \rightarrow Z_2$ ist:

$$(g_1 + g_2) \circ (f_1 + f_2) = (g_1 \circ f_1) + (g_2 \circ f_2). \quad (13.27)$$

Beweis. XXXX □

Für den Spezialfall der Einbettungsmorphismen $\iota_i: X_i \rightarrow \amalg$ folgt nach Bemerkung (13.18), dass:

$$\coprod_{i \in I} \iota_i = \text{id}_{\amalg}: \amalg \rightarrow \amalg. \quad (13.28)$$

Lemma 13.24. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten, $\amalg = \coprod_{i \in I} X_i$ ihr Koprodukt und $(\iota_i: X_i \rightarrow \amalg)_{i \in I}$ die Familie der dazugehörigen Einbettungsmorphismen. Sei $(f_i: X_i \rightarrow A)_{i \in I}$ eine Familie von Morphismen und einen Morphismus $g: A \rightarrow B$ ist:

$$\coprod_{i \in I} (g \circ f_i) \cong g \circ \coprod_{i \in I} f_i. \quad (13.29)$$

Beweis. Beide Morphismen treten als universeller Morphismus der Familie $(g \circ f_i: X_i \rightarrow B)_{i \in I}$ auf und sind daher aufgrund der universellen Eigenschaft isomorph:

$$\begin{array}{ccccc} & & X_i & & \\ & \swarrow \iota_i & \downarrow f_i & \searrow g \circ f_i & \\ \amalg & & A & \xrightarrow{g} & B \\ & \swarrow \coprod_{i \in I} f_i & & \searrow g & \\ & & \amalg_{i \in I} (g \circ f_i) & & \end{array}$$

□

Durch Kombination von Gleichung (13.28) und Lemma (13.24) zeigt sich, dass jeder Morphismus $h: \amalg \rightarrow C$ aus einem Koprodukt (bis auf Isomorphie) selbst als Koprodukt dargestellt werden kann:

$$h = h \circ \text{id}_{\amalg} = h \circ \coprod_{i \in I} \iota_i \cong \coprod_{i \in I} (h \circ \iota_i). \quad (13.30)$$

13.5 Biprodukte

Meist wird zur Verdeutlichung von kategorientheoretischen Konzepten die Kategorie **Set** der Mengen benutzt, nach den Beispielen (XXXX) und (XXXX) können in dieser sowohl Produkte als auch Koprodukte explizit angegeben werden. Dabei unterscheiden sich diese jedoch stets voneinander, wenn nicht ausschließlich leere Mengen betrachtet werden. Für diese gilt:

$$\emptyset \times \emptyset = \emptyset + \emptyset = \emptyset. \quad (13.31)$$

In allgemeinen Kategorien ist es jedoch durchaus möglich, dass Produkte und Koprodukte einer Familie an Objekten miteinander bis auf Isomorphie übereinstimmen.

Beispiel 13.25. Für einen Ring R stimmen in der Kategorie ${}_R\mathbf{Mod}$ der R -Linksmoduln bzw. in der Kategorie $\mathbf{Mod}_R$ der R -Rechtsmoduln das Produkt und Koprodukt einer endlichen Menge an R -Linksmoduln bzw. R -Rechtsmoduln miteinander überein.

Definition 13.26 (Biprodukt). Für eine Familie $(X_i)_{i \in I} \in \mathbf{Ob} \mathcal{C}$ ist ein Objekt $P \in \mathbf{Ob} \mathcal{C}$ mit:

I.) Projektionsmorphisamen $\pi_i: P \rightarrow X_i$

II.) Einbettungsmorphisamen $\iota_i: X_i \rightarrow P$

sodass:

I.) (P, π_i) ein Produkt

II.) (P, ι_i) ein Koprodukt

ist, ein Biprodukt.

Kapitel 14

Faser- und Kofaserprodukte

Faser- und Kofaserprodukte verallgemeinern Produkte und Koprodukte.

14.1 Faserprodukte

Definition 14.1 (Span). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist mit der Kategorie $\Lambda = (-1 \rightarrow 0 \leftarrow +1)$ ein Funktor $F: \Lambda \rightarrow \mathcal{C}$ ein Span von $\mathcal{C}$.

Ein Span von $\mathcal{C}$ ist also ein Diagramm der Form $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ in $\mathcal{C}$. Es ist:

$$\mathbf{Span}(\mathcal{C}) := \mathbf{Fct}(\Lambda, \mathcal{C}) \quad (14.1)$$

die Kategorie der Spans von $\mathcal{C}$.

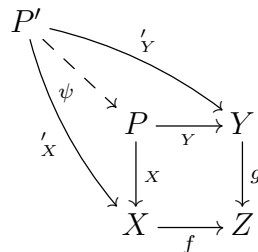
Definition 14.2 (Faserprodukt). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$, Objekte $X, Y, Z \in \mathbf{Ob} \mathcal{C}$ und Morphismen $f \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, $g \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ ist ein Objekt $P \in \mathbf{Ob} \mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen ${}_X \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(P, X)$, ${}_Y \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(P, Y)$, für die:

$$f \circ {}_X = g \circ {}_Y \quad (14.2)$$

und für die:

$$\begin{aligned} \forall P' \in \mathbf{Ob} \mathcal{C} \forall {}_X \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(P', X), {}_Y \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(P', Y) \exists ! \psi \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(P', P): \\ {}'_X = {}_X \circ \psi \wedge {}'_Y = {}_Y \circ \psi, \end{aligned} \quad (14.3)$$

also für die das Diagramm:



kommutiert, ein Faserprodukt (oder Pullback) des Diagramms $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$.

Beispiel 14.3. In **Set** ist für $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ das Faserprodukt gegeben durch:

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}. \quad (14.4)$$

Die Morphismen f und g gehören mit zu den Daten des Faserprodukts, da sie jedoch oft aus dem Zusammenhang klar sind, werden sie meist nicht extra notiert. Ohne die Forderung der Eindeutigkeit des Morphismus ψ wird Definition (14.2) zu der eines *schwachen Faserprodukts*. Das kommutative quadratische Diagramm eines Faserproduktes wird *kartesisch* genannt. Das Faserprodukt ist nicht eindeutig, jedoch gilt analog zu Lemma (13.8) für Produkte:

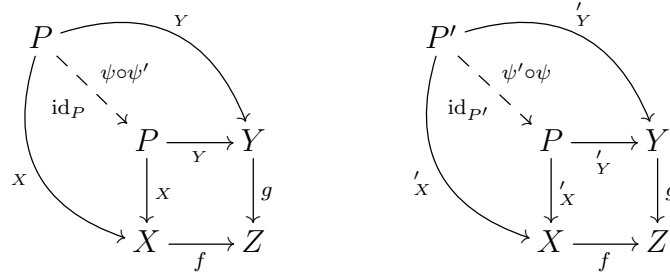
Lemma 14.4. *Je zwei Faserprodukte zweier Objekte sind isomorph.*

Beweis. Sei $\mathbb{C}$ eine Kategorie, $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ ein Diagramm in $\mathbb{C}$ und $P, P' \in \text{Ob } \mathbb{C}$ zwei Faserprodukte von diesem mit entsprechenden Projektionsmorphismen $x \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(P, X)$, $y \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(P, Y)$ und $'x \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(P', X)$, $'y \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(P', Y)$ von diesen. Per Definition (14.2) gibt es genau ein $\psi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(P', P)$ mit $'x = x \circ \psi$ und $'y = y \circ \psi$ sowie genau ein $\psi' \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(P, P')$ mit $x = 'x \circ \psi'$ und $y = 'y \circ \psi'$, womit:

$$x = x \circ \psi \circ \psi' \quad (14.5)$$

$$y = y \circ \psi \circ \psi' \quad (14.6)$$

und die Diagramme:



kommutieren. Aufgrund der Eindeutigkeit des entsprechenden Strukturmorphismus zwischen den Faserprodukten per Definition (14.2) gilt $\text{id}_P = \psi \circ \psi'$ und $\text{id}_{P'} = \psi' \circ \psi$. $\square$

Aufgrund dieses Lemmas wird das Faserprodukt eines Diagramms $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ notiert als $X \times_Z Y$. Offenbar ist aufgrund der Symmetrie des Diagramms das Faserprodukt symmetrisch bis auf Isomorphie:

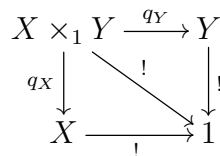
$$X \times_Z Y \cong Y \times_Z X. \quad (14.7)$$

Ein grundlegendes Verständnis von Faserprodukten ergibt sich aus der Betrachtung spezieller Objekte im Span, etwa initialen und terminalen Objekten.

Lemma 14.5. *In einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit terminalem Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ sind Faserprodukte die Verallgemeinerungen von Produkten. Für den Span $X \xrightarrow{!} 1 \xleftarrow{!} Y$ ist (sofern existent):*

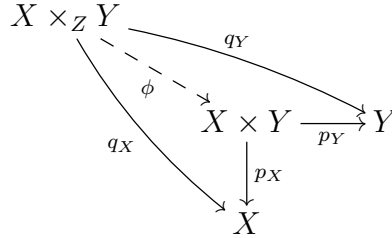
$$X \times_1 Y \cong X \times Y. \quad (14.8)$$

Beweis. Das Diagramm:



kommutiert mit beliebigen Morphismen $q_X: X \times_1 Y \rightarrow X$ und $q_Y: X \times_1 Y \rightarrow Y$. XXXX $\square$

Das Faserprodukt lässt sich aber in jedem Fall über einen kanonischen Morphismus mit dem Produkt verbinden. Für einen Kospan $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ hat dessen Faserprodukt $X \times_Z Y$ jeweils Morphismen $q_X: X \times_Z Y \rightarrow X$ und $q_Y: X \times_Z Y \rightarrow Y$ nach X und Y , ist also ein schwaches Produkt von diesen. Daher gibt es einen universellen Morphismus in das Produkt:



Ein grundlegendes Verständnis von Faserprodukten ergibt sich ebenso aus der Betrachtung spezieller Morphismen im Span, allen voran Identitäten, aber auch Monomorphismen, Retraktionen und Isomorphismen.

Korollar 14.6. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$, Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einen Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ist X ein Faserprodukt des Diagramms $X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{\text{id}_Y} Y$ mit Einbettungsmorphismen id_X und f , womit unabhängig von f :

$$X \times_Y Y \cong X. \quad (14.9)$$

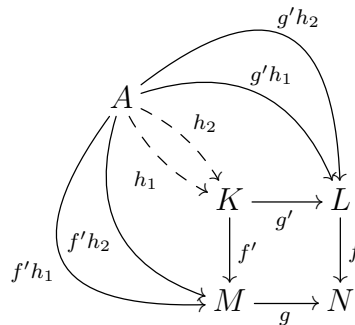
Lemma 14.7. Monomorphismen und Retraktionen sind stabil unter Basiswechsel. Sei folgendes Diagramm kartesisch:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g'} & L \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

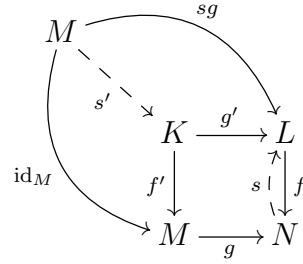
Ist f monisch, dann ist f' monisch. Ist f eine Retraktion, dann ist f' eine Retraktion.

Ist f ein Isomorphismus, dann ist f' ein Isomorphismus nach Lemma (3.31).

Beweis. XXXX



$$\begin{aligned} f' \circ h_1 = f' \circ h_2 &\Rightarrow g \circ f' \circ h_1 = g \circ f' \circ h_2 \Rightarrow f \circ g' \circ h_1 = f \circ g' \circ h_2 \\ &\xRightarrow{f \text{ monisch}} g' \circ h_1 = g' \circ h_2 \end{aligned} \quad (14.10)$$



Sei $s: N \rightarrow L$ mit $f \circ s = \text{id}_N$, also $g \circ \text{id}_M = f \circ s \circ g$, dann gibt es genau ein $s': M \rightarrow K$ mit $f' \circ s' = \text{id}_M$. $\square$

Das Faserprodukt wird in der speziellen Anwendung in speziellen Teilgebieten der Mathematik häufig anders ausgedrückt. Die beiden Morphismen eines Kospan $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ können als gemeinsamer Morphismus $f \times g: X \times Y \rightarrow Z \times Z$ zusammengefasst werden. Mit dem kanonischen Diagonalmorphismus $\Delta_Z: Z \rightarrow Z \times Z$ aus Gleichung (13.10) ergibt sich daher ein komplett neuer Kospan, dessen Faserprodukt (jedoch bis auf Isomorphie) das des ursprünglichen Kospan ist.

Lemma 14.8. Für einen Kospan $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ ist das Diagramm:

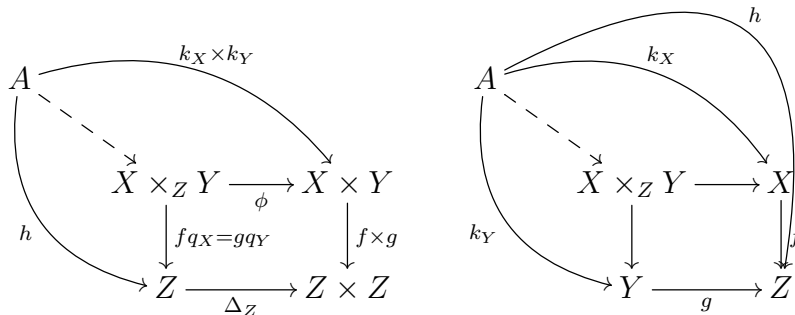
$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{\phi} & X \times Y \\ f q_X = g q_Y \downarrow & & \downarrow f \times g \\ Z & \xrightarrow{\Delta_Z} & Z \times Z \end{array}$$

kommutativ und kartesisch.

Beweis. Das Diagramm ist kommutativ, denn mit Gleichung (13.15), Lemma (13.12) und Lemma (13.10) ist:¹

$$\begin{aligned} (f \times g)\phi &= (f \times g)(p_X \phi \times p_Y \phi) = (f \times g)(q_X \times q_Y) \\ &= f q_X \times g q_Y \cong \Delta_Z f q_X = \Delta_Z g q_Y. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Für Morphismen $k_X: A \rightarrow X$, $k_Y: A \rightarrow Y$ und $h: A \rightarrow Z$ kommutiert das äußere Diagramm links genau dann wenn $h = f k_X = g k_Y$, woraus ebenfalls folgt, dass das äußere Diagramm rechts kommutiert:



Ein Morphismus $A \rightarrow X \times_Z Y$ lässt das linke Diagramm genau dann kommutieren, wenn dieser das rechte Diagramm kommutieren lässt. Aus der Eindeutigkeit rechts folgt die Eindeutigkeit links. $\square$

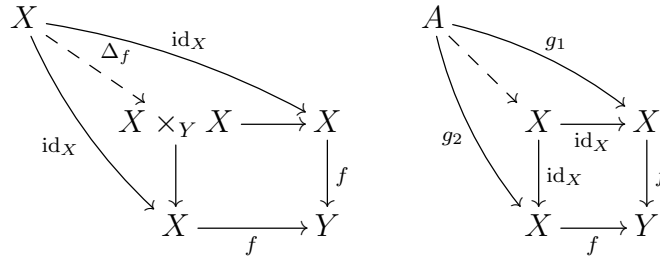
¹Der scheinbare erste Schritt $(f \times g) \circ \phi \cong (f \circ \phi) \times (g \circ \phi)$ mit Lemma (13.12) ist dabei falsch. Die Kodomäne von ϕ und die Domäne von f bzw. g stimmen nicht überein. Das liegt daran, dass in Lemma (13.12) das Produkt von Morphismen mit gleicher Domäne betrachtet wird.

Mithilfe des Faserproduktes lässt sich der Diagonalmorphismus selbst verallgemeinern, was ein äquivalentes Kriterium für einen Morphismus ergibt, monisch zu sein.

Lemma 14.9. *Ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann monisch, wenn der universelle Morphismus $\Delta_f: X \rightarrow X \times_Y X$ ein Isomorphismus ist.*

Ist Y terminal und daher f die terminale Abbildung von X , fällt dieser universelle Morphismus Δ_f mit Lemma (14.5) auf den Diagonalmorphismus von X zurück, kann also als *verallgemeinerter Diagonalmorphismus* bezeichnet werden.

Beweis.



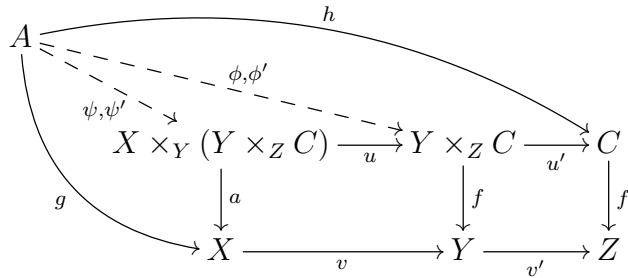
$\Rightarrow$: Vergleiche mit dem linken Diagramm. Ist f monisch, dann ist $X \times_Y X \rightarrow X$ nach Lemma (14.7) monisch. Da dieser zudem eine Retraktion des universellen Morphismus $\Delta_f: X \rightarrow X \times_Y X$ ist, ist dieser nach Lemma (3.31) ein Isomorphismus, weshalb auch der universelle Morphismus $X \rightarrow X \times_Y X$ (als dessen Inverses) einer ist.

$\Leftarrow$: Vergleiche mit dem rechten Diagramm. Ist $\Delta_f: X \rightarrow X \times_Y X$ ein Isomorphismus, dann ist X insbesondere ein Faserprodukt des Spans $X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{f} X$. Seien $g_1, g_2: A \rightarrow X$ parallele Morphismen mit $f \circ g_1 = f \circ g_2$, dann ist $g_1 = g_2$ der universelle Morphismus. $\square$

Lemma 14.10. *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und Objekte $A, B, C, D \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:*

$$(A \times_B C) \times_C D \cong A \times_B D. \quad (14.12)$$

Beweis.



Sei $v'vg = f'h$. Da das rechte Quadrat kartesisch ist, $\exists! \phi: A \rightarrow Y \times_Z C$ mit $vg = f\phi$ und $h = u'\phi$. Da das links Quadrat kartesisch ist, $\exists! \psi: A \rightarrow X \times_Y (Y \times_Z C)$ mit $g = a\psi$ und $\phi = u\psi$. Es folgt $h = u'\phi = u'u\psi$.

Sei $\psi': A \rightarrow X \times_Y (Y \times_Z C)$ ein Morphismus mit $g = a\psi'$ und $h = u'u\psi'$ und sei $\phi' = u\psi'$, dann ist $vg = va\psi' = fu\psi' = f\phi'$ und $h = u'u\psi' = u'\phi'$, womit $\phi' = \phi$, da das rechte Quadrat kartesisch ist, und $\psi = \psi'$, da das linke Quadrat kartesisch ist.

$X \times_Y (Y \times_Z C)$ ist daher ein Faserprodukt des Kospanns $X \xrightarrow{v} Y \xleftarrow{f'} C$, wodurch die Behauptung aus Lemma (14.4) folgt. $\square$

Lemma 14.11. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und einen Span $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$, für den das Produkt $X \times Y$ existiert, ist:

$$X \times_Z Y \cong \ker(f_X, g_Y) \quad (14.13)$$

$$X \times_Z Y \longrightarrow X \times Y \xrightleftharpoons[f_X]{g_Y} Z$$

Beweis. XXXX □

14.2 Kofaserprodukte

Definition 14.12 (Kospan). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist mit der Kategorie $\Lambda^{\text{op}} = (-1 \leftarrow 0 \rightarrow +1)$ ein Funktor $F: \Lambda^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Kospan von $\mathcal{C}$.

Ein Kospan von $\mathcal{C}$ ist also ein Diagramm der Form $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$ in $\mathcal{C}$. Es ist:

$$\mathbf{CoSpan}(\mathcal{C}) := \mathbf{Fct}(\Lambda^{\text{op}}, \mathcal{C}) \quad (14.14)$$

die Kategorie der Kospans von $\mathcal{C}$.

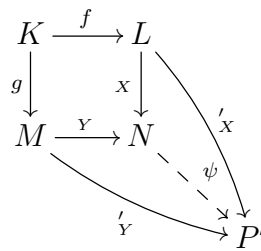
Definition 14.13 (Kofaserprodukt). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$, Objekte $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und Morphismen $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$ ist ein Objekt $P \in \text{Ob } \mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $x \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, P)$, $y \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, P)$, für die:

$$x \circ f = y \circ g \quad (14.15)$$

und für die:

$$\begin{aligned} \forall P' \in \text{Ob } \mathcal{C} \forall x \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, P'), y \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, P') \exists! \psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, P'): \\ x'_X = \psi \circ x \wedge y'_Y = \psi \circ y, \end{aligned} \quad (14.16)$$

also für die das Diagramm:



kommutiert, ein Kofaserprodukt (oder Pushout) des Diagramms $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$.

Die Morphismen f und g gehören mit zu den Daten des Kofaserprodukts, da sie jedoch oft aus dem Zusammenhang klar sind, werden sie meist nicht extra notiert. Ohne die Forderung der Eindeutigkeit des Morphismus ψ wird Definition (14.13) zu der eines *schwachen Kofaserprodukts*. Das kommutative quadratische Diagramm eines Kofaserproduktes wird *kokartesisch* genannt. Das Kofaserprodukt ist nicht eindeutig, jedoch gilt analog zu Lemma (13.20) für Koprodukte:

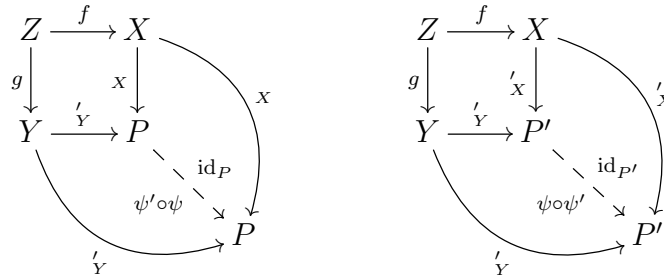
Lemma 14.14. Je zwei Kofaserprodukte zweier Objekte sind isomorph.

Beweis. Sei $\mathbb{C}$ eine Kategorie, $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$ ein Diagramm in $\mathbb{C}$ und $P, P' \in \text{Ob } \mathcal{C}$ zwei Kofaserprodukte von diesem mit entsprechenden Einbettungsmorphismen $x \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, P)$, $y \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, P)$ und $x' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, P')$, $y' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, P')$ in diese. Per Definition (14.13) gibt es genau ein $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, P')$ mit $x' = \psi \circ x$ und $y' = \psi \circ y$ sowie genau ein $\psi' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, P')$ mit $x = \psi' \circ x'$ und $y = \psi' \circ y'$, womit:

$$x = \psi' \circ \psi \circ x' \quad (14.17)$$

$$y = \psi' \circ \psi \circ y' \quad (14.18)$$

und die Diagramme:



kommutieren. Aufgrund der Eindeutigkeit des entsprechenden Strukturmorphismus zwischen den Faserprodukten per Definition (14.13) gilt $\text{id}_P = \psi' \circ \psi$ und $\text{id}_{P'} = \psi \circ \psi'$. $\square$

Aufgrund dieses Lemmas wird das Kofaserprodukt eines Diagramms $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$ notiert als $X +_Z Y$. Offenbar ist aufgrund der Symmetrie des Diagramms das Kofaserprodukt symmetrisch bis auf Isomorphie:

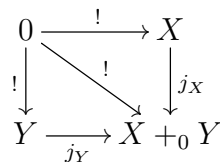
$$X +_Z Y \cong Y +_Z X. \quad (14.19)$$

Ein grundlegendes Verständnis von Kofaserprodukten ergibt sich aus der Betrachtung spezieller Objekte im Kospan, etwa initialen und terminalen Objekten.

Lemma 14.15. *In einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit initialem Objekt $0 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ sind Kofaserprodukte die Verallgemeinerungen von Koprodukten. Für den Kospan $X \xleftarrow{!} 0 \xrightarrow{!} Y$ ist (sofern existent):*

$$X +_0 Y \cong X + Y. \quad (14.20)$$

Beweis. Das Diagramm:



kommutiert mit beliebigen Morphismen $j_X: X \rightarrow X +_0 Y$ und $j_Y: Y \rightarrow X +_0 Y$. XXXX $\square$

Das Kofaserprodukt lässt sich aber in jedem Fall über einen kanonischen Morphismus mit dem Produkt verbinden. Für einen Span $X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} Y$ hat dessen Kofaserprodukt $X +_A Y$ jeweils Morphismen $j_X: X \rightarrow X +_A Y$ und $j_Y: Y \rightarrow X +_A Y$ aus X und Y , ist

also ein schwaches Koprodukt von diesen. Daher gibt es einen universellen Morphismus aus dem Koprodukt:

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 i_X \downarrow & & \searrow j_X \\
 Y \xrightarrow{i_Y} X + Y & \xrightarrow{\psi} & X +_A Y \\
 & \nwarrow j_Y & \\
 & &
 \end{array}$$

Ein grundlegendes Verständnis von Kofaserprodukten ergibt sich ebenso aus der Betrachtung spezieller Morphismen im Kospan, allen voran Identitäten, aber auch Epimorphismen, Schnitte und Isomorphismen.

Korollar 14.16. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$, Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einen Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ist Y ein Kofaserprodukt des Diagramms $Y \xleftarrow{f} X \xrightarrow{\text{id}_X} X$ mit Projektionsmorphisme id_Y und f , womit unabhängig von f :

$$Y +_X X \cong Y. \quad (14.21)$$

Lemma 14.17. Epimorphismen und Schnitte sind stabil unter Kobasiswechsel. Sei folgendes Diagramm kokartesisch:

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{g} & L \\
 f \downarrow & & \downarrow f' \\
 M & \xrightarrow{g'} & N
 \end{array}$$

Ist f episch, dann ist f' episch. Ist f ein Schnitt, dann ist f' ein Schnitt.

Ist f ein Isomorphismus, dann ist f' ein Isomorphismus nach Lemma (3.36).

Beweis. XXXX

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{g} & L \\
 f \downarrow & & \downarrow f' \\
 M & \xrightarrow{g'} & N \\
 & & \searrow h_2 \\
 & & Z
 \end{array}$$

Additional arrows in the diagram: $h_1: M \rightarrow Z$, $h_1 g' = h_2 g$, $h_1 f' = h_2 f$, $h_2 g' = h_1 g$, $h_2 f' = h_1 f$.

$$\begin{aligned}
 h_1 \circ f' = h_2 \circ f' &\Rightarrow h_1 \circ f' \circ g = h_2 \circ f' \circ g \Rightarrow h_1 \circ g' \circ f = h_2 \circ g' \circ f \\
 &\xRightarrow{f \text{ episch}} h_1 \circ g' = h_2 \circ g'
 \end{aligned} \quad (14.22)$$

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{g} & L \\
 f \downarrow \wr r & & \downarrow f' \\
 M & \xrightarrow{g'} & N \\
 & & \searrow r' \\
 & & L
 \end{array}$$

Additional arrows: $gr: M \rightarrow L$, $gr = r' \circ f'$.

Sei $r: M \rightarrow K$ mit $r \circ f = \text{id}_K$, also $g \circ r \circ f = \text{id}_L \circ g$, dann gibt es genau ein $r': N \rightarrow L$ mit $r' \circ f' = \text{id}_L$. $\square$

Das Kofaserprodukt wird in der speziellen Anwendung in speziellen Teilgebieten der Mathematik häufig anders ausgedrückt. Die beiden Morphismen eines Spans $X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} Y$ können als gemeinsamer Morphismus $f+g: A+A \rightarrow X+Y$ zusammengefasst werden. Mit dem kanonischen Kodiagonalmorphismus $\nabla_A: A+A \rightarrow A$ aus Gleichung (13.25) ergibt sich daher ein komplett neuer Span, dessen Kofaserprodukt (jedoch bis auf Isomorphie) das des ursprünglichen Spans ist.

Lemma 14.18. *Für einen Span $X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} Y$ ist das Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} A+A & \xrightarrow{\nabla_A} & A \\ f+g \downarrow & & \downarrow j_X f = j_Y g \\ X+Y & \xrightarrow{\psi} & X+_A Y \end{array}$$

kommutativ und kokartesisch.

Eine bekannte Anwendung dieses Lemmas stammt aus der Algebraischen Topologie bei der Betrachtung einer CW-Struktur von Sphären. S^n ist das Kofaserprodukt des Spans $D^n \leftarrow S^{n-1} \rightarrow D^n$ und nach diesem Lemma daher ebenso des Spans $D^n + D^n \leftarrow S^{n-1} + S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, was passt besser zur Interpretation passt, dass S^n durch Anklebung von zwei n -Zellen an S^{n-1} entsteht.

Beweis. Das Diagramm ist kommutativ, denn mit Gleichung (13.30), Lemma (13.24) und Lemma (13.22) ist:²

$$\begin{aligned} \psi(f+g) &= (\psi i_X + \psi i_Y)(f+g) = (j_X + j_Y)(f+g) \\ &= (j_X f + j_Y g) = \nabla_A j_X f = \nabla_A j_Y g \end{aligned} \quad (14.23)$$

Für Morphismen $k_X: X \rightarrow Z$, $k_Y: Y \rightarrow Z$ und $h: A \rightarrow Z$ kommutiert das äußere Diagramm links genau dann wenn $h = k_X f = k_Y g$, woraus ebenfalls folgt, dass das äußere Diagramm rechts kommutiert:

Ein Morphismus $X+_A Y \rightarrow Z$ lässt das linke Diagramm genau dann kommutieren, wenn dieser das rechte Diagramm kommutieren lässt. Aus der Eindeutigkeit rechts folgt die Eindeutigkeit links. $\square$

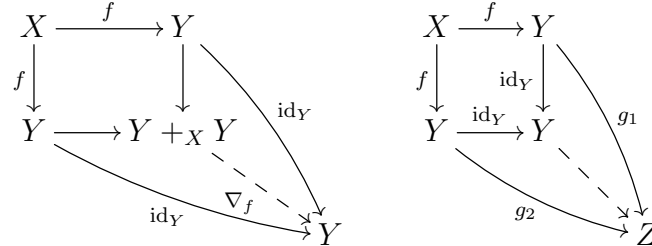
Mithilfe des Kofaserproduktes lässt sich der Kodiagonalmorphismus selbst verallgemeinern, was ein äquivalentes Kriterium für einen Morphismus ergibt, episch zu sein.

²Der scheinbare erste Schritt $\psi \circ (f+g) \cong (\psi \circ f) + (\psi \circ g)$ mit Lemma (13.24) ist dabei falsch. Die Domäne von ψ und die Kodomäne von f bzw. g stimmen nicht überein. Das liegt daran, dass in Lemma (13.24) das Koprodukt von Morphismen mit gleicher Kodomäne betrachtet wird.

Lemma 14.19. *Ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann episch, wenn der universelle Morphismus $\nabla_f: Y +_X Y \rightarrow Y$ ein Isomorphismus ist.*

Ist X initial und daher f die initiale Abbildung von Y , fällt dieser universelle Morphismus ∇_f mit Lemma (14.15) auf den Kodiagonalmorphismus von Y zurück, kann also als *verallgemeinerter Kodiagonalmorphismus* bezeichnet werden.

Beweis.



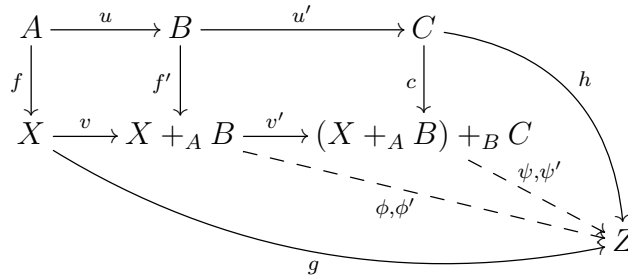
$\Rightarrow$: Vergleiche mit dem linken Diagramm. Ist f episch, dann ist $Y \rightarrow Y +_X Y$ nach Lemma (14.17) episch. Da dieser zudem ein Schnitt des universellen Morphismus $\nabla_f: Y +_X Y \rightarrow Y$ ist, ist dieser nach Lemma (3.36) ein Isomorphismus, weshalb auch der universelle Morphismus $\nabla_f: Y +_X Y \rightarrow Y$ (als dessen Inverses) einer ist.

$\Leftarrow$: Vergleiche mit dem rechten Diagramm. Ist $\nabla_f: Y +_X Y \rightarrow Y$ ein Isomorphismus, dann ist Y insbesondere ein Kofaserprodukt des Kospanns $Y \xleftarrow{f} X \xrightarrow{f} Y$. Seien $g_1, g_2: Y \rightarrow Z$ parallele Morphismen mit $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, dann ist $g_1 = g_2$ der universelle Morphismus. $\square$

Lemma 14.20. *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und Objekte $A, B, C, D \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:*

$$(A +_B C) +_C D \cong A +_B D \quad (14.24)$$

Beweis.



Sei $gf = hu'u$. Da das linke Quadrat kokartesisch ist, $\exists! \phi: X +_A B \rightarrow Z$ mit $g = \phi v$ und $hu' = \phi f'$. Da das rechte Quadrat kokartesisch ist, $\exists! \psi: (X +_A B) +_B C \rightarrow Z$ mit $\phi = \psi v'$ und $h = \psi c$. Es folgt $g = \phi v = \psi v' v$.

Sei $\psi': A \rightarrow X \times_Y (Y \times_Z C)$ ein Morphismus mit $g = \psi' v' v$ und $h = \psi' c$ und sei $\phi' = \psi' v'$, dann ist $g = \psi' v' v = \phi' v$ und $hu' = \psi' c u' = \psi' v' f' = \phi' f'$, womit $\phi' = \phi$, da das linke Quadrat kokartesisch ist, und $\psi = \psi'$, da das rechte Quadrat kokartesisch ist.

$(X +_A B) +_B C$ ist daher ein Kofaserprodukt des Spans $X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{u'} C$, wodurch die Behauptung aus Lemma (14.14) folgt. $\square$

Lemma 14.21. *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und einen Kospan $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$, für den das Koproduct $X + Y$ existiert, ist:*

$$X +_Z Y \cong \text{coker}({}_X f, {}_Y g) \quad (14.25)$$

$$Z \xrightarrow[{}_X f]{{}_Y g} X + Y \longrightarrow X +_Z Y$$

Beweis. XXXX □

14.3 Faserprodukt-Exponent

Definition 14.22 (Faserprodukt-Exponent). *Seien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ Kategorien, wobei $\mathbb{C}$ alle Faserprodukte enthält und $[-, -]: \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Funktor sowie $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus in $\mathcal{D}$ und $g: X \rightarrow Y$ ein Morphismus in $\mathcal{E}$. Der universelle Morphismus:*

$$\begin{array}{c}
 [B, X] \xrightarrow{[f, \text{id}_X]} [A, X] \\
 \downarrow g^f \quad \downarrow [f, \text{id}_Y]' \\
 [A, X] \times_{[A, Y]} [B, Y] \xrightarrow{[f, \text{id}_Y]'} [A, X] \\
 \downarrow [\text{id}_A, g] \quad \downarrow [\text{id}_B, g]' \quad \downarrow [\text{id}_B, g] \\
 [B, Y] \xrightarrow{[f, \text{id}_Y]} [A, Y]
 \end{array}$$

$$g^f: [B, X] \rightarrow [A, X] \times_{[A, Y]} [B, Y] \quad (14.26)$$

ist der Faserprodukt-Exponent.

Lemma 14.23. *Ist f episch oder g monisch, dann ist g^f episch.*

Beweis. Sei f episch in $\mathcal{D}$, dann ist f monisch in $\mathcal{D}^{\text{op}}$. Nach Lemma (XXXX) ist $[f, \text{id}_X]$ monisch, womit die Behauptung aus Lemma (3.8) folgt. Sei g monisch. Nach Lemma (XXXX) ist $[\text{id}_A, g]$ monisch, womit die Behauptung aus Lemma (3.8) folgt. □

14.4 Kofaserprodukt-Produkt

Definition 14.24 (Kofaserprodukt-Produkt). *Seien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ Kategorien, wobei $\mathcal{E}$ alle Kofaserprodukte enthält, $\otimes: \mathbb{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ ein Funktor sowie $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus in $\mathbb{C}$ und $g: X \rightarrow Y$ ein Morphismus in $\mathcal{D}$. Der universelle Morphismus:*

$$\begin{array}{c}
 A \otimes X \xrightarrow{f \otimes \text{id}_X} B \otimes X \\
 \downarrow \text{id}_A \otimes g \quad \downarrow (\text{id}_A \otimes g)' \quad \downarrow \text{id}_B \otimes g \\
 A \otimes Y \xrightarrow{(f \otimes \text{id}_X)'} A \otimes Y +_{A \otimes X} B \otimes X \xrightarrow{f \square g} B \otimes Y \\
 \downarrow f \otimes \text{id}_Y \\
 B \otimes Y
 \end{array}$$

$$f \square g: A \otimes Y +_{A \otimes X} B \otimes X \rightarrow B \otimes Y \quad (14.27)$$

in $\mathcal{E}$ ist das Faserprodukt-Produkt.

Korollar 14.25. *Das Kofaserprodukt-Produkt ist kommutativ.*

Lemma 14.26. *Ist f (oder g) episch, dann ist $f \square g$ episch.*

Beweis. Nach Lemma (XXXX) ist $f \otimes \text{id}_Y$ episch, womit die Behauptung aus Lemma (3.16) folgt. □

Kapitel 15

Exponentialobjekte

Definition 15.1 (Exponentialobjekte). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit binären Produkten und Objekte $Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ mit einer Evaluationsabbildung $\text{ev} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, Z)$, für die:

$$\forall X' \in \text{Ob } \mathcal{C} \forall \text{ev}' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X' \times Y, Z) \exists! \psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X): \text{ev}' = \text{ev} \circ (\psi \times \text{id}_Y) \quad (15.1)$$

$$\begin{array}{ccc} X' \times Y & \xrightarrow{\psi \times \text{id}_Y} & X \times Y \\ & \searrow \text{ev}' & \swarrow \text{ev} \\ & Z & \end{array}$$

ein Exponentialobjekt von Y und Z .

Lemma 15.2. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit binären Produkten existiert $\forall Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ein Exponentialobjekt, zudem sind alle Exponentialobjekte von Y und Z isomorph.

Aufgrund dieses Lemmas wird für das Exponentialobjekt von Y und Z die Schreibweise Z^Y benutzt.

Beweis. Seien $X, X' \in \text{Ob } \mathcal{C}$ zwei Exponentialobjekte von Y und Z mit entsprechenden Evaluationsabbildungen $\text{ev}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, Z)$ und $\text{ev}_{X'} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X' \times Y, Z)$. Per Definition (15.1) gibt es genau ein $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$ mit $\text{ev}_{X'} = \text{ev}_X \circ (\psi \times \text{id}_Y)$ sowie genau ein $\psi' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$ mit $\text{ev}_X = \text{ev}_{X'} \circ (\psi' \times \text{id}_Y)$, womit:

$$\text{ev}_X = \text{ev}_X \circ (\psi \times \text{id}_Y) \circ (\psi' \times \text{id}_Y) = \text{ev}_X \circ ((\psi \circ \psi') \times \text{id}_Y) \quad (15.2)$$

$$\text{ev}_{X'} = \text{ev}_{X'} \circ (\psi' \times \text{id}_Y) \circ (\psi \times \text{id}_Y) = \text{ev}_{X'} \circ ((\psi' \circ \psi) \times \text{id}_Y) \quad (15.3)$$

und die Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow[\text{id}_X \times \text{id}_Y]{(\psi \circ \psi') \times \text{id}_Y} & X \times Y \\ & \searrow \text{ev}_X & \swarrow \text{ev}_X \\ & Z & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X' \times Y & \xrightarrow[\text{id}_{X'} \times \text{id}_Y]{(\psi' \circ \psi) \times \text{id}_Y} & X' \times Y \\ & \searrow \text{ev}_{X'} & \swarrow \text{ev}_{X'} \\ & Z & \end{array}$$

kommutieren. Aufgrund der Eindeutigkeit des entsprechenden Morphismus zwischen den Exponentialobjekten per Definition (15.1) gilt:

$$(\psi \circ \psi') \times \text{id}_Y = \text{id}_X \times \text{id}_Y \Rightarrow \psi \circ \psi' = \text{id}_X \quad (15.4)$$

$$(\psi' \circ \psi) \times \text{id}_Y = \text{id}_{X'} \times \text{id}_Y \Rightarrow \psi' \circ \psi = \text{id}_{X'} \quad (15.5)$$

□

Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit binären Produkten, Objekten $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einen Morphismus $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ sind $\text{ev}_Z \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z^Y \times Y, Z)$ und $f \circ \text{ev}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^Y \times Y, Y)$ zwei Evaluationsabbildungen, sodass per Definition ein eindeutiges $f^Y \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^Y, Z^Y)$ existiert, sodass:

$$f \circ \text{ev}_X = \text{ev}_Z \circ (f^Y \times \text{id}_Y), \quad (15.6)$$

also das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X^Y \times Y & \xrightarrow{\text{ev}_X} & X \\ f^Y \times \text{id}_Y \downarrow & \searrow f \circ \text{ev}_X & \downarrow f \\ Z^Y \times Y & \xrightarrow{\text{ev}_Z} & Z \end{array}$$

kommutiert.

Lemma 15.3. *Mit einem terminalen Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$:*

$$1^X \cong 1. \quad (15.7)$$

Beweis. $1^X \cong 1$ erfüllt die universelle Eigenschaft des Exponentialobjektes. Mit Lemma (13.3) ist $1 \times X \cong X$ und daher:

$$\begin{array}{ccc} A \times X & \xrightarrow{! \times \text{id}_X} & 1^X \times X \cong 1 \times X \cong X \\ & \searrow ! & \swarrow ! \\ & 1 & \end{array}$$

□

Lemma 15.4. *Mit einem initialen Objekt $0 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einem terminalen Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$:*

$$X^0 \cong 1. \quad (15.8)$$

Beweis. $X^0 \cong 1$ erfüllt die universelle Eigenschaft des Exponentialobjektes. Mit Lemma (13.3) ist $1 \times 0 \cong 0$ und daher:

$$\begin{array}{ccc} A \times 0 & \xrightarrow{! \times \text{id}_0} & X^0 \times 0 \cong 1 \times 0 \cong 0 \\ & \searrow ! & \swarrow ! \\ & 1 & \end{array}$$

□

Lemma 15.5. *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit binären Produkten und ein Objekt $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:*

$$-^Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, Z \mapsto Z^Y, f \mapsto f^Y \quad (15.9)$$

ein kovarianter Funktor.

Beweis.

$$\text{ev} \circ (\text{id}_X^Y \times \text{id}_Y) = \text{ev} = \text{ev} \circ (\text{id}_{X^Y} \times \text{id}_Y) \Rightarrow \text{id}_X^Y \times \text{id}_Y = \text{id}_{X^Y} \times \text{id}_Y \Rightarrow \text{id}_X^Y = \text{id}_{X^Y} \quad (15.10)$$

$$\begin{array}{ccc}
 X^Y \times Y & \xrightarrow[\text{id}_X^Y \times \text{id}_Y]{\text{id}_{X^Y} \times \text{id}_Y} & X^Y \times Y \\
 & \searrow \text{ev} & \swarrow \text{ev} \\
 & X &
 \end{array}$$

$$\text{ev}_C \circ ((f \circ g)^Y \times \text{id}_Y) = f \circ g \circ \text{ev}_A = f \circ \text{ev}_B \circ g^Y = \text{ev}_C \circ (f^Y \circ g^Y) \quad (15.11)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & A^Y \times Y & \xrightarrow{\text{ev}_A} & A & \\
 & \downarrow g^Y \times \text{id}_Y & & \downarrow g & \\
 (f \circ g)^Y \times \text{id}_Y & (f^Y \circ g^Y) \times \text{id}_Y & B^Y \times Y & \xrightarrow{\text{ev}_B} & B \\
 & \downarrow f^Y \times \text{id}_Y & & \downarrow f & \\
 & C^Y \times Y & \xrightarrow{\text{ev}_C} & C & \\
 & & & & \uparrow f \circ g
 \end{array}$$

□

Lemma 15.6. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit binären Produkten ist:

$$\forall X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, Z) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z^Y) \quad (15.12)$$

Beweis. XXXX

□

Lemma 15.7. Für eine kartesisch abgeschlossene Kategorie $\mathcal{C}$ mit binären Produkten gilt:

$$\forall X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}: (X^Y)^Z \cong X^{Y \times Z} \quad (15.13)$$

Beweis. XXXX

□

Lemma 15.8. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit binären Produkten und Objekte $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:

$$(X \times Y)^Z \cong X^Z \times Y^Z \quad (15.14)$$

Beweis. XXXX

□

Lemma 15.9. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit binären Produkten und Objekte $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:

$$X^{Y+Z} \cong X^Y \times X^Z \quad (15.15)$$

Beweis. XXXX

□

Kapitel 16

Kerne und Kokerne

Kerne und Kokerne gehören zu den wichtigsten Grundbegriffen der Homologischen Algebra, etwa aufgrund der Klassifizierung von Injektionen und Surjektionen oder der Anwendung im Homomorphiesatz.

16.1 Kerne

Definition 16.1 (Kern). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit initialem Objekt $0 \in \text{Ob } \mathcal{C}$, Objekten $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einen Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ist:*

$$\ker(f) := X \times_Y 0 \quad (16.1)$$

dessen Kern.

Das entsprechende kokartesische Diagramm ist:

$$\begin{array}{ccc} \ker(f) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow ! \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Meist wird auch der Morphismus $\ker(f) \hookrightarrow X$ als $\ker(f)$ bezeichnet. Da $0 \xrightarrow{!} Y$ nach Beispiel (3.6) monisch ist und diese nach Lemma (14.7) stabil unter Basiswechsel sind, ist $\ker(f)$ monisch. Der Morphismus $\ker(f) \rightarrow 0$ ist nach Korollar (3.34) eine Retraktion (und daher episch).

Beispiel 16.2. *In der Kategorie der Mengen ist für jede Abbildung $f: X \rightarrow Y$ der Kern gegeben durch $\ker(f) \cong 0$.*

Habe $\mathbb{C}$ ebenso ein terminales Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Für $X \xrightarrow{!} 1$ ist dann $\ker(!) \cong X \times 0$ mit Lemma (14.5). Da $0 \xrightarrow{!} Y$ nach Beispiel (3.6) monisch ist, ist $\ker(f) \rightarrow X$ nach Lemma (14.7) monisch.

$$\begin{array}{ccccc} \ker \ker(f) & \longrightarrow & \ker(f) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow ! \\ 0 & \xrightarrow{!} & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Mit Lemma (14.10) ist:

$$\ker \ker(f) \cong 0 \times_X \ker(f) \cong 0 \times_X (X \times_Y 0) \cong 0 \times_Y 0 \cong 0 \quad (16.2)$$

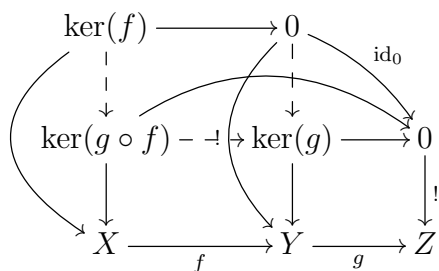
Lemma 16.3. Für einen Monomorphismus $f: X \hookrightarrow Y$ ist $\ker(f) \cong 0$.

Beweis. Ist $f: X \hookrightarrow Y$ monisch, dann ist $\ker(f) \hookrightarrow 0$ nach Lemma (14.7) monisch. Nach Korollar (3.34) ist $\ker(f) \hookrightarrow 0$ ebenso eine Retraktion und daher nach Lemma (3.31) ein Isomorphismus. $\square$

Lemma 16.4. In einer Kategorie mit Nullobjekt ist $\ker(f)$ ein f -injektives Objekt.

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $0 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ein Nullobjekt und $f \in \text{Ar } \mathcal{C}$ ein Morphismus. Aus $f \in (f)$ folgt $(\ker(f) \xrightarrow{!} 0) \in (f)$ nach Lemma (??), was gemäß Lemma (??) äquivalent dazu ist, dass $\ker(f)$ ein f -injektives Objekt ist. $\square$

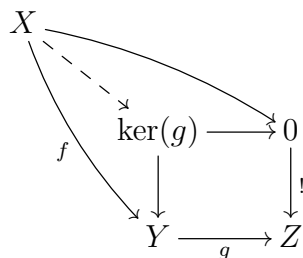
Für eine Sequenz $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ an Objekten gibt es eine kanonische Sequenz $\ker(f) \rightarrow \ker(g \circ f) \rightarrow \ker(g) \rightarrow 0$, da:



Darüber hinaus gilt:

Lemma 16.5. $g \circ f$ faktorisiert genau dann über 0, wenn f über $\ker(g)$ faktorisiert.

Beweis.



$\Rightarrow$: Das äußere Quadrat im obigen Diagramm kommutiert, womit die Behauptung aus der Existenz des universellen Morphismus folgt. $\Leftarrow$: $\square$

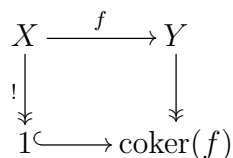
16.2 Kokerne

Definition 16.6 (Kokern). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit terminalem Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$, Objekten $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einen Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ist:

$$\text{coker}(f) := Y +_X 1 \quad (16.3)$$

dessen Kokern.

Das entsprechende kartesische Diagramm ist:



Meist wird auch der Morphismus $Y \twoheadrightarrow \text{coker}(f)$ als $\text{coker}(f)$ bezeichnet. Da $X \xrightarrow{!} 1$ nach Beispiel (3.12) episch ist und diese nach Lemma (14.17) stabil unter Kobasiswechsel sind, ist $\text{coker}(f)$ episch. Der Morphismus $1 \hookrightarrow \text{coker}(f)$ ist nach Korollar (3.35) ein Schnitt (und daher monisch).

Beispiel 16.7. In der Kategorie der Mengen ist für jede Abbildung $f: X \rightarrow Y$ der Kokern gegeben durch $\text{coker}(f) \cong 1$.

Habe $\mathbb{C}$ ebenso ein initiales Objekt $0 \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Für $0 \xrightarrow{!} Y$ ist dann $\ker(!) \cong X + 1$ mit Lemma (14.15). Da $X \xrightarrow{!} 1$ nach Beispiel (3.12) episch ist, ist $Y \rightarrow \text{coker}(f)$ nach Lemma (14.17) episch.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow ! & & \downarrow & & \downarrow ! \\ 1 & \longrightarrow & \text{coker}(f) & \longrightarrow & \text{coker } \text{coker}(f) \end{array}$$

Mit Lemma (14.20) ist:

$$\text{coker } \text{coker}(f) \cong 1 +_Y \text{coker}(f) \cong 1 +_Y (Y +_X 1) \cong 1 +_X 1 \cong 1 \quad (16.4)$$

Lemma 16.8. Für einen Epimorphismus $f: X \twoheadrightarrow Y$ ist $\text{coker}(f) \cong 1$.

Beweis. Ist $f: X \twoheadrightarrow Y$ episch, dann ist $1 \twoheadrightarrow \text{coker}(f)$ nach Lemma (14.17) episch. Nach Korollar (3.35) ist $1 \twoheadrightarrow \text{coker}(f)$ ebenso ein Schnitt und daher nach Lemma (3.36) ein Isomorphismus. $\square$

Lemma 16.9. In einer Kategorie mit Nullobjekt ist $\text{coker}(f)$ ein f -projektives Objekt.

Beweis. Sei $\mathbb{C}$ eine Kategorie, $\Omega \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ein Nullobjekt und $f \in \text{Ar } \mathcal{C}$ ein Morphismus. Aus $f \in (f)$ folgt $(\Omega \xrightarrow{!} \text{coker}(f)) \in (f)$ nach Lemma (??), was gemäß Lemma (??) äquivalent dazu ist, dass $\text{coker}(f)$ ein f -projektives Objekt ist. $\square$

Für eine Sequenz $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ an Objekten gibt es eine kanonische Sequenz $\text{coker}(f) \rightarrow \text{coker}(g \circ f) \rightarrow \text{coker}(g)$, da:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow ! & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \text{coker}(f) & \xrightarrow{\quad} & \text{coker}(g \circ f) \\ & \searrow \text{id}_1 & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ & & 1 & \longrightarrow & \text{coker}(g) \end{array}$$

Darüber hinaus gilt:

Lemma 16.10. $g \circ f$ faktorisiert genau dann über 1, wenn g über $\text{coker}(f)$ faktorisiert.

Beweis.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow ! & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \text{coker}(f) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow g \\ \searrow \text{dashed} \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} Z \\ \downarrow \end{array}$$

$\Rightarrow$: Das äußere Quadrat im obigen Diagramm kommutiert, womit die Behauptung aus der Existenz des universellen Morphismus folgt. $\Leftarrow$: $\square$

16.3 Normale Morphismen

Definition 16.11 (Normaler Monomorphismus). *Ein Morphismus, der als Kern eines Morphismus auftritt, wird normaler Monomorphismus genannt.*

Beispiel 16.12. *In $\mathbf{Grp}$ ist ein Monomorphismus $\phi: G \hookrightarrow H$ genau dann normal, wenn $\phi(G) \triangleleft H$ normal ist.*

Dieses Beispiel ist der Ursprung der Benennung als *normal*.

Definition 16.13 (Normale Kategorie). *Eine Kategorie, in der jeder Monomorphismus normal ist, wird normal genannt.*

Definition 16.14 (Normaler Epimorphismus). *Ein Morphismus, der als Kokern eines Morphismus auftritt, wird normaler Epimorphismus genannt.*

Definition 16.15 (Konormale Kategorie). *Eine Kategorie, in der jeder Epimorphismus normal ist, wird konormal genannt.*

Definition 16.16 (Binormale Kategorie). *Eine normale und konormale Kategorie wird binormal genannt.*

Da in abelschen Kategorien nach Lemma (XXXX) jeder Monomorphismus der Kern seines Kokerns und nach Lemma (XXXX) jeder Epimorphismus der Kokern seines Kerns ist, folgt:

Korollar 16.17. *Abelsche Kategorien sind binormal.*

Kapitel 17

Differenzkerne und -kokerne

Die Eigenräume der Linearen Algebra sind Kerne der Differenz zweier linearer Abbildungen, der zu untersuchenden Abbildung und der Identität mit einem Vorfaktor. (Nur wenn dieser Vorfaktor ein Eigenwert der zu untersuchenden Abbildung ist, ist der Eigenraum nicht trivial.) Der Kern der zu untersuchenden Abbildung ergibt sich dabei, wenn dieser Vorfaktor verschwindet, womit Eigenräume als verallgemeinerte Kerne betrachtet werden können.

In der Kategorientheorie existiert ohne zusätzliche Struktur auf einer Kategorie keine Differenz zweier paralleler Morphismen. Ein Umweg ist die Erkenntnis, dass in der Linearen Algebra ein Punkt genau dann im Kern der Differenz zweier linearer Abbildungen liegt, wenn beide für diesen Punkt übereinstimmen. Der Kern ihrer Differenz ist daher der größte Untervektorraum, auf dem die linearen Abbildungen übereinstimmen. Diese Beschreibung lässt sich nun auf die Kategorientheorie verallgemeinern.

17.1 Differenzkerne

Definition 17.1 (Differenzkern). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und Objekte $Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist für zwei parallele Morphismen $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und ein Morphismus $\pi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, für den:*

$$I.) \quad f \circ \pi = g \circ \pi$$

$$II.) \quad \forall \pi' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y), f \circ \pi' = g \circ \pi' \exists! \psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X): \pi' = \pi \circ \psi$$

also für den das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} X' & & & & \\ \psi \downarrow & \searrow \pi' & & \xrightarrow{f} & Z \\ X & \xrightarrow{\pi} & Y & \xrightleftharpoons[g]{} & \end{array}$$

kommutiert, ein Differenzkern (auch Egalisator oder Equaliser) von f und g .

Differenzkerne müssen nicht eindeutig sein, jedoch gilt:

Lemma 17.2. *Differenzkerne zweier paralleler Morphismen sind isomorph.*

Beweis. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ Objekte, $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ parallele Morphismen und $X, X' \in \text{Ob } \mathcal{C}$ zwei Differenzkerne von ihnen mit entsprechenden Morphismen von diesen. Per Definition gibt es genau ein $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$ mit $\pi' = \pi \circ \psi$

und genau ein $\psi' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$ mit $\pi = \pi' \circ \psi'$, womit:

$$\pi = \pi \circ \psi \circ \psi' \quad (17.1)$$

und die Diagramme:

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ \text{id}_X, \psi \circ \psi' \downarrow & \searrow \pi & & & \\ X & \xrightarrow{\pi} & Y & \xrightleftharpoons[g]{f} & Z \end{array}$$

kommutieren. Aufgrund der Eindeutigkeit des entsprechenden Morphismus zwischen den Differenzkernen per Definition gilt $\text{id}_X = \psi \circ \psi'$ und umgekehrt auch $\text{id}_{X'} = \psi' \circ \psi$. $\square$

Der Differenzkern zweier paralleler Morphismen f, g wird aufgrund dieser Eindeutigkeit bis auf Isomorphie auch als $\ker(f, g)$ bezeichnet.

Beispiel 17.3. Für einen Morphismus $f: Y \rightarrow Z$ ist $\ker(f, f) \cong \text{dom}(f) = Y$ und der Strukturmorphismus die Identität, also das Diagramm:

$$Y \xrightarrow{\text{id}_Y} Y \xrightleftharpoons[f]{f} Z$$

ein Differenzkern.

Beispiel 17.4. In **Set** ist für parallele Morphismen $f, g: Y \rightrightarrows Z$:

$$\ker(f, g) = \{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}. \quad (17.2)$$

Dieses Beispiel ist der Ursprung der anderen Benennung des Differenzkerns als *Equalizer*, da hier all die Elemente der Domäne enthalten sind, deren Bild unter beiden Morphismen gleich (eng. *equal*) ist.

Lemma 17.5. Ist $i_1 \circ i_2: A \rightarrow B \hookrightarrow Y$ mit i_2 monisch ein Differenzkern von $f, g: Y \rightrightarrows Z$, dann ist i_1 ein Differenzkern von $f \circ i_2, g \circ i_2: B \rightarrow Y \rightrightarrows Z$.

Beweis. Sei $\phi: X \rightarrow B$ ein Morphismus mit $f \circ i_2 \circ \phi = g \circ i_2 \circ \phi$, dann gibt es einen eindeutigen Morphismus $\phi': X \rightarrow A$ mit $i_2 \circ \phi = i_2 \circ i_1 \circ \phi'$, also $\phi = i_1 \circ \phi'$:

$$\begin{array}{ccccccc} X & & & & & & \\ \phi' \downarrow & \searrow \phi & \searrow i_2 \circ \phi & & & & \\ A & \xrightarrow{i_1} & B & \xrightarrow{i_2} & Y & \xrightleftharpoons[g]{f} & Z \end{array}$$

$\square$

Lemma 17.6 (Kern als Differenzkern). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit Nullobjekt $\Omega \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einem Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ist:

$$\ker(f) \cong \ker(f, \Omega_{X,Y}). \quad (17.3)$$

Dabei ist $\Omega_{X,Y}: X \xrightarrow{!} \Omega \xrightarrow{!} Y$ der Nullmorphimus nach Definition (2.13).

Beweis. XXXX □

Lemma 17.7. *Differenzkerne sind Monomorphismen.*

Beweis. Seien $f, g: Y \rightarrow Z$ parallele Morphismen mit Differenzkern $i: \ker(f, g) \rightarrow Y$, also insbesondere $f \circ i = g \circ i$. Seien $\phi_1, \phi_2: X \rightarrow \ker(f, g)$ parallele Morphismen mit $i \circ \phi_1 = i \circ \phi_2$, also $f \circ (i \circ \phi_1) = (f \circ i) \circ \phi_1 = (g \circ i) \circ \phi_2 = g \circ (i \circ \phi_2)$. Aufgrund der universellen Eigenschaft des Differenzkerns faktorisiert $i \circ \phi_1 = i \circ \phi_2$ eindeutig über i , womit $\phi_1 = \phi_2$:

$$\begin{array}{ccccc} & X & & & \\ & \downarrow \phi_1 \quad \downarrow \phi_2 & \searrow & & \\ \ker(f, g) & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow[f]{g} & Z \end{array}$$

□

Die Umkehrung gilt nicht unbedingt, daher können Monomorphismen, je nachdem ob sie als Differenzkern auftreten können, eingeteilt werden.

17.2 Differenzkokerne

Definition 17.8 (Differenzkokern). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist für zwei parallele Morphismen $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ein Objekt $Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und ein Morphismus $\iota \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, für den:*

I.) $\iota \circ f = \iota \circ g$

II.) $\forall \iota' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z'), \iota' \circ f = \iota' \circ g \exists! \psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z'): \iota' = \psi \circ \iota$

also für den das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow[f]{g} & Y & \xrightarrow{\iota} & Z \\ & & \searrow \iota' & \downarrow \psi & \\ & & & Z' \end{array}$$

kommutiert, ein Differenzkokern (auch Koegalisor oder Koequaliser) von f und g .

Differenzkokerne müssen nicht eindeutig sein, jedoch gilt:

Lemma 17.9. *Differenzkokerne zweier paralleler Morphismen sind isomorph.*

Beweis. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ Objekte, $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ parallele Morphismen und $Z, Z' \in \text{Ob } \mathcal{C}$ zwei Differenzkokerne von ihnen mit entsprechenden Morphismen von diesen. Per Definition gibt es genau ein $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z')$ mit $\iota' = \psi \circ \iota$ und genau ein $\psi' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z)$ mit $\iota = \psi' \circ \iota'$, womit:

$$\iota = \psi' \circ \psi \circ \iota \tag{17.4}$$

und die Diagramme:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow[f]{g} & Y & \xrightarrow{\iota} & A \\ & & \searrow \iota & \downarrow \text{id}_Z, \psi' \circ \psi & \\ & & & Z \end{array}$$

kommutieren. Aufgrund der Eindeutigkeit des entsprechenden Morphismus zwischen den Differenzkernen per Definition gilt $\text{id}_Z = \psi' \circ \psi$ und umgekehrt auch $\text{id}_{Z'} = \psi \circ \psi'$. $\square$

Der Differenzkokerne zweier paralleler Morphismen f, g wird aufgrund dieser Eindeutigkeit bis auf Isomorphie auch als $\text{coker}(f, g)$ bezeichnet.

Beispiel 17.10. Für einen Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ist $\text{coker}(f, f) \cong \text{cod}(f) = Y$ und der Strukturmorphismus die Identität, also das Diagramm:

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{f} \end{array} Y \xrightarrow{\text{id}_Y} Y$$

ein Differenzkokerne.

Beispiel 17.11. In $\mathbf{Grp}$ ist für parallele Morphismen $f, g: X \rightrightarrows Y$:

$$\text{coker}(f, g) = Y/\mathcal{N}(\{f(x)g(x)^{-1} | x \in X\}). \quad (17.5)$$

Lemma 17.12. Ist $p_1 \circ p_2: Y \rightarrow A \rightarrow B$ mit p_1 episch ein Differenzkokerne von $f, g: X \rightrightarrows Y$, dann ist p_2 ein Differenzkokerne von $p_1 \circ f, p_1 \circ g: X \rightrightarrows Y \rightarrow A$.

Beweis. Ist $\psi: Y \rightarrow Z$ ein Morphismus mit $\psi \circ p_1 \circ f = \psi \circ p_1 \circ g$, dann gibt es einen eindeutigen Morphismus $\psi': Y \rightarrow Z$ mit $\psi \circ p_1 = \psi' \circ p_2 \circ p_1$, also $\psi = \psi' \circ p_2$:

$$\begin{array}{ccccc} X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Y & \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1} \\ \xrightarrow{p_1} \end{array} & A & \xrightarrow{p_2} & B \\ & & & \searrow & \downarrow \psi' & & \\ & & & \psi & & & \\ & & & \psi \circ p_1 & & & \\ & & & & & & Z \end{array}$$

$\square$

Lemma 17.13 (Kokern als Differenzkokerne). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit Nullobjekt $\Omega \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einen Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ist:

$$\text{coker}(f) \cong \text{coker}(f, \Omega_{X,Y}). \quad (17.6)$$

Dabei ist $\Omega_{X,Y}: X \xrightarrow{!} \Omega \xrightarrow{!} Y$ der Nullmorphismus nach Definition (2.13).

Beweis. XXXX $\square$

Lemma 17.14. Differenzkokerne sind Epimorphismen.

Beweis. Seien $f, g: X \rightarrow Y$ parallele Morphismen mit Differenzkokerne $p: Y \rightarrow \text{coker}(f, g)$, also insbesondere $p \circ f = p \circ g$. Seien $\psi_1, \psi_2: \text{coker}(f, g) \rightarrow Z$ parallele Morphismen mit $\psi_1 \circ p = \psi_2 \circ p$, also $(\psi_1 \circ p) \circ f = \psi_1 \circ (p \circ f) = \psi_2 \circ (p \circ g) = (\psi_2 \circ p) \circ g$. Aufgrund der universellen Eigenschaft des Differenzkokerne faktorisiert $\psi_1 \circ p = \psi_2 \circ p$ eindeutig über p , womit $\psi_1 = \psi_2$:

$$\begin{array}{ccc} X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Y \\ & \searrow & \downarrow p \\ & & \text{coker}(f, g) \\ & \searrow & \downarrow \psi_1 \downarrow \psi_2 \\ & & Z \end{array}$$

$\square$

Die Umkehrung gilt nicht unbedingt, daher können Epimorphismen, je nachdem ob sie als Differenzkokerne auftreten können, eingeteilt werden.

17.3 Reguläre Monomorphismen

Definition 17.15 (Regulärer Monomorphismus). *Ein Monomorphismus, der als Differenzkern zweier paralleler Morphismen auftritt, wird regulärer Monomorphismus genannt.*

Beispiel 17.16. *Identitäten sind nach Beispiel (17.3) reguläre Monomorphismen.*

Nach Lemma (17.6) sind Kerne spezielle Differenzkerne, woraus folgt:

Korollar 17.17. *Normale Monomorphismen sind reguläre Monomorphismen.*

Aus Lemma (17.5) folgt:

Korollar 17.18. *Ist $g \circ f$ ein regulärer Monomorphismus und g monisch, dann ist f ein regulärer Monomorphismus.*

Siehe [2], Proposition 7.62 3).

Lemma 17.19. *Schnitte sind reguläre Monomorphismen.*

Beweis. Sei $s: Y \rightarrow Z$ ein Schnitt mit Retraktion $r: Z \rightarrow Y$, also $r \circ s = \text{id}_Y$. Sei $\phi: X \rightarrow Z$ ein Morphismus mit $\phi = s \circ r \circ \phi$, womit $r \circ \phi$ der universelle Morphismus ist. Sei $\phi': X \rightarrow Y$ ein Morphismus mit $\phi = s \circ \phi'$, dann ist $\phi' = r \circ s \circ \phi = r \circ \phi$:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \phi' = r \circ \phi \downarrow & \searrow \phi & \\ Y & \xrightarrow{s} & Z \xrightarrow[\text{so } r]{\text{id}_Y} Z \end{array}$$

□

17.4 Reguläre Epimorphismen

Definition 17.20 (Regulärer Epimorphismus). *Ein Epimorphismus, der als Differenzkern zweier paralleler Morphismen auftritt, wird regulärer Epimorphismus genannt.*

Beispiel 17.21. *Identitäten sind nach Beispiel (17.10) reguläre Epimorphismen.*

Nach Lemma (17.13) sind Kokerne spezielle Differenzkokerne, woraus folgt:

Korollar 17.22. *Normale Epimorphismen sind reguläre Epimorphismen.*

Lemma 17.23. *Reguläre Monomorphismen sind extremale Monomorphismen.*

Beweis. Sei $i: X \hookrightarrow Y$ ein regulärer Monomorphismus, dann gibt es parallele Morphismen $f, g: Y \rightrightarrows Z$, sodass $i \cong (\ker(f, g) \hookrightarrow Y)$. Sei $i = i_1 \circ i_2$ eine Faktorisierung mit i_2 episch.

$$\begin{array}{ccccc} & A & & & \\ & \searrow & & & \\ X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow[f]{g} & Z \\ & \searrow i_1 & \nearrow i_2 & & \\ & X' & & & \end{array}$$

□

Aus Lemma (17.12) folgt:

Korollar 17.24. *Ist $g \circ f$ ein regulärer Epimorphismus und f episch, dann ist g ein regulärer Epimorphismus.*

Siehe [2], Proposition XXXX.

Lemma 17.25. *Retraktionen sind reguläre Epimorphismen.*

Beweis. Sei $r: X \rightarrow Y$ eine Retraktion mit Schnitt $s: Y \rightarrow X$, also $r \circ s = \text{id}_Y$. Sei $\psi: X \rightarrow Z$ ein Morphismus mit $\psi = \psi \circ s \circ r$, womit $\psi \circ s$ der universelle Morphismus ist. Sei $\psi': Y \rightarrow Z$ ein Morphismus mit $\psi = \psi' \circ r$, dann ist $\psi' = \psi' \circ r \circ s = \psi \circ s$:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow[\text{so}r]{\text{id}_X} & X & \xrightarrow{r} & Y \\ & & \searrow \psi & & \downarrow \psi' = \psi \circ s \\ & & & & Z \end{array}$$

□

Lemma 17.26. *Die jeweiligen Klassen von:*

I.) *Isomorphismen*

II.) *Epi- und regulären Monomorphismen*

III.) *Mono- und regulären Epimorphismen*

sind gleich.

Beweis. I.) $\Rightarrow$ II.): Trivial. I.) $\Rightarrow$ III.): Trivial.

II.) $\Rightarrow$ I.): Sei $i: X \rightarrow Y$ ein Epimorphismus und regulärer Monomorphismus. Aufgrund der zweiten Eigenschaft gibt es Morphismen $f, g: Y \rightrightarrows Z$, sodass $i \cong (\ker(f, g) \hookrightarrow Y)$, also insbesondere $f \circ i = g \circ i$. Wegen der ersten Eigenschaft folgt $f = g$, also $(\ker(f, g) \hookrightarrow Y) \cong \text{id}_Y$ nach Beispiel (17.3), womit $i \cong \text{id}_Y$, also i ein Isomorphismus ist.

III.) $\Rightarrow$ I.): Sei $p: Y \rightarrow Z$ ein Monomorphismus und regulärer Epimorphismus. Aufgrund der zweiten Eigenschaft gibt es Morphismen $f, g: X \rightrightarrows Y$, sodass $p \cong (Y \twoheadrightarrow \text{coker}(f, g))$, also insbesondere $p \circ f = p \circ g$. Wegen der ersten Eigenschaft folgt $f = g$, also $(Y \twoheadrightarrow \text{coker}(f, g)) \cong \text{id}_Y$ nach Beispiel (17.10), womit $p \cong \text{id}_Y$, also p ein Isomorphismus ist. □

17.5 Fix- und Kofixobjekte

Spezielle Differenzkerne und -kokerne sind die eines Morphismus und des parallelen Nullmorphismus (sofern die Kategorie ein Nullobjekt enthält), wobei die Lemmata (17.6) und (17.13) zeigen, dass sich dadurch jeweils Kern und Kokern des ersteren Morphismus ergeben. Ebenfalls spezielle Differenzkerne und -kokerne sind die eines Endomorphismus und der Identität des entsprechenden Objektes, wobei diese sich nicht unbedingt anders ausdrücken lassen und eine neue Definition notwendig ist. Der Vergleich mit Beispiel (17.4) zeigt, dass der Differenzkern eines Endomorphismus und der Identität des entsprechenden Objektes in **Set** die Fixpunktmenge des Endomorphismus ergibt.

Definition 17.27 (Fixobjekt). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$, ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und ein Endomorphismus $f: X \rightarrow X$ ist:

$$\text{Fix}(f) := \ker(f, \text{id}_X) \quad (17.7)$$

dessen Fixobjekt.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Fix}(f) & \\ & \downarrow & \\ \text{Fix}(g \circ f) & \longrightarrow & X \\ & \text{id}_X \downarrow f & \\ \text{Fix}(g) & \longrightarrow & X \xrightarrow[\text{id}_X]{g} X \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Fix}(f) \times_X \text{Fix}(g) &= \{(x_1, x_2) \in \text{Fix}(f) \times \text{Fix}(g) \mid x_1 = x_2\} \\ &= \{(x, x) \mid x \in \text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g)\} \cong \text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g) \end{aligned} \quad (17.8)$$

Definition 17.28 (Kofixobjekt). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$, ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und ein Endomorphismus $f: X \rightarrow X$ ist:

$$\text{Cofix}(f) := \text{coker}(f, \text{id}_X) \quad (17.9)$$

dessen Kofixobjekt.

Kapitel 18

Bilder und Kobilder

Bilder sind aus der Mengenlehre bekannt, ihre Definition beruht jedoch auf den Elementen einer Menge. Kobilder sind aus der Homologischen Algebra bekannt, ihre Definition beruht jedoch auf der Faktorgruppe.

18.1 Bilder

Definition 18.1 (Bild). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit initialem Objekt $0 \in \text{Ob}$ und terminalem Objekt $1 \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ist für einen Morphismus $f: X \rightarrow Y$:*

$$\text{img}(f) := \text{coker}(\ker(f)) \quad (18.1)$$

dessen Bild.

Lemma 18.2. *Für $f: X \rightarrow Y$ monisch, ist $\text{img}(f) \cong X + 1$.*

Beweis. Mit den Lemmata (16.3) und (14.15) ist:

$$\text{img}(f) = \text{coker } \ker(f) \cong \text{coker}(0 \xrightarrow{!} X) \cong X +_0 1 \cong X + 1 \quad (18.2)$$

□

Da $f: X \rightarrow Y$ monisch, ist $\ker(f) \rightarrow 0$ monisch.

Da $0 \xrightarrow{!} Y$ monisch ist, ist $\ker(f) \hookrightarrow X$ monisch und daher $1 \hookrightarrow \text{img}(f)$ monisch.

Da $\ker(f) \twoheadrightarrow 1$ episch ist, ist $X \twoheadrightarrow \text{img}(f)$ episch.

Wird die Konstruktion nach Bemerkung (XXXX) auf die Sequenz $\ker(f) \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ angewendet, ergibt sich eine Sequenz $\text{img}(f) \rightarrow \text{coker}(\ker(f) \rightarrow Y) \rightarrow \text{coker}(f)$.

18.2 Kobilder

Definition 18.3 (Kobild). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit initialem Objekt $0 \in \text{Ob}$ und terminalem Objekt $1 \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ist für einen Morphismus $f: X \rightarrow Y$:*

$$\text{coimg}(f) := \ker(\text{coker}(f)) \quad (18.3)$$

dessen Kobild.

Lemma 18.4. *Für $f: X \rightarrow Y$ episch ist $\text{coimg}(f) \cong Y \times 0$.*

Beweis. Mit den Lemmata (16.8) und (14.5) ist:

$$\text{coimg}(f) = \ker \text{coker}(f) \cong \ker(Y \xrightarrow{!} 1) \cong Y \times_1 0 \cong Y \times 0 \quad (18.4)$$

□

Da $f: X \rightarrow Y$ episch, ist $1 \rightarrow \text{coker}(f)$ episch.

Da $X \xrightarrow{!} 1$ episch ist, ist $Y \rightarrow \text{coker}(f)$ episch und daher $\text{coimg}(f) \rightarrow 0$ episch.

Da $0 \xrightarrow{!} \text{coker}(f)$ monisch ist, ist $\text{coimg}(f) \hookrightarrow Y$ monisch.

Wird die Konstruktion nach Bemerkung (XXXX) auf die Sequenz $X \xrightarrow{f} Y \twoheadrightarrow \text{coker}(f)$ angewendet, ergibt sich eine Sequenz $\ker(f) \rightarrow \text{coker}(X \rightarrow \text{coker}(f)) \rightarrow \text{coimg}(f)$.

Kapitel 19

Diagramme

Für Kategorien $\mathcal{I}$ und $\mathbb{C}$ wird ein Funktor $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ auch $\mathcal{I}$ -förmiges *Diagramm* auf $\mathbb{C}$ genannt. Ist die Kategorie $\mathcal{I}$ klein bzw. zusammenhängend, dann wird das Diagramm *klein* bzw. *zusammenhängend* genannt.

19.1 Kegel

Definition 19.1 (Kegel). Für Kategorien $\mathcal{I}$ und $\mathbb{C}$ und einen Funktor $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ besteht ein Kegel des Diagramms aus:

- I.) einem Objekt $K \in \text{Ob } \mathbb{C}$, der Kegelspitze
- II.) einem Morphismus $\phi_X \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(K, FX)$ für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{I}$, sodass:

$$\bigvee_{X, Y \in \text{Ob } \mathcal{I}} \bigvee_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{I}}(X, Y)} : \phi_Y = Ff \circ \phi_X \quad (19.1)$$

also sodass das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & K & \\ \phi_X \swarrow & & \searrow \phi_Y \\ FX & \xrightarrow{Ff} & FY \end{array}$$

kommutiert.

Definition 19.2 (Kegelmorphismus). Für Kategorien $\mathcal{I}$ und $\mathbb{C}$, einen Funktor $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ und Kegel $(K, \phi_X), (K', \phi'_X)$ ist ein Morphismus $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(K, K')$ für den:

$$\bigvee_{X \in \text{Ob } \mathcal{I}} : \phi_X = f \circ \phi'_X \quad (19.2)$$

also für den das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & K' \\ \phi_X \searrow & & \swarrow \phi'_X \\ & FX & \end{array}$$

kommutiert, ein Kegelmorphismus

Sei $\Delta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ ein Funktor, für den für alle $X \in \text{Ob } \mathbb{C}$, alle $I \in \text{Ob } \mathcal{I}$ und alle $i \in \text{Ar } \mathcal{I}$ gilt, dass $\Delta(X)(I) = X$ und $\Delta(X)(i) = \text{id}_X$.

Definition 19.3 (Kegelkategorie). Für Kategorien $\mathcal{I}$ und $\mathbb{C}$ und einen Funktor $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ ist:

$$\text{Cone}(F) := (\Delta \downarrow F) \quad (19.3)$$

dessen Kegelkategorie.

19.2 Kokegel

Definition 19.4 (Kokegel). Für Kategorien $\mathcal{I}$ und $\mathbb{C}$ und einen Funktor $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ besteht ein Kokegel des Diagramms aus:

I.) einem Objekt $K \in \text{Ob } \mathbb{C}$, der Kokegelspitze

II.) einem Morphismus $\psi_X \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(FX, K)$ für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{I}$, sodass:

$$\bigvee_{X, Y \in \text{Ob } \mathcal{I}} \bigvee_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{I}}(X, Y)} : \psi_X = \psi_Y \circ Ff \quad (19.4)$$

also sodass das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{Ff} & FY \\ & \searrow \psi_X & \swarrow \psi_Y \\ & K & \end{array}$$

kommutiert.

Definition 19.5 (Kokegelmorphismus). Für Kategorien $\mathcal{I}, \mathbb{C}$, einen Funktor $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ und Kokegel (K, ψ_X) und (K', ψ'_X) ist ein Morphismus $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(K, K')$ für den:

$$\bigvee_{X \in \text{Ob } \mathcal{I}} : \psi'_X = \psi_X \circ f \quad (19.5)$$

also für den das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & FX & \\ \psi_X \swarrow & & \searrow \psi'_X \\ K & \xrightarrow{f} & K' \end{array}$$

kommutiert, ein Kokegelmorphismus

Definition 19.6 (Kokegelkategorie). Für Kategorien $\mathcal{I}$ und $\mathbb{C}$ und einen Funktor $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ ist:

$$\text{Cocone}(F) := (F \downarrow \Delta) \quad (19.6)$$

dessen Kokegelkategorie.

Kapitel 20

Limiten und Kolimiten

Limiten und Kolimiten gehören zu den wichtigsten Konzepten der Kategorientheorie aufgrund ihrer Verallgemeinerung anderer Konzepte wie Produkten und Koprodukten, Faserprodukten und Kofaserprodukten sowie Differenzkernen und Differenzkokernen. Besonders kurios ist, dass Kan-Erweiterungen beide Spezialfälle von Limiten und Kolimiten sind, aber diese umgekehrt ebenso Spezialfälle von Kan-Erweiterungen.

20.1 Limiten

Definition 20.1 (Limes). *Ein Limes eines Diagramms $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein terminales Objekt in der Kegelkategorie von F .*

Ist das Diagramm klein bzw. zusammenhängend, dann wird der Limes *klein* bzw. *zusammenhängend* genannt. Aus Lemma (2.8) folgt:

Korollar 20.2. *Limiten sind eindeutig bis auf Isomorphie.*

Der Limes eines Diagramms $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ wird daher auch als $\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} X_i$ bezeichnet. Es gilt:

$$\varprojlim (\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}) \cong 1 \quad (20.1)$$

Der Limes eines kleinen bzw. zusammenhängenden Diagramms wird *kleiner* bzw. *zusammenhängender Limes* genannt.

Lemma 20.3. *Ein Funktor erhält Limiten genau dann, wenn er terminale Objekte und zusammenhängende Limiten erhält.*

Beweis. □

Lemma 20.4. *Für ein Diagramm $X: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ mit einem initialen Objekt $0 \in \text{Ob } \mathcal{I}$ ist:*

$$\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} X_i \cong X_0. \quad (20.2)$$

Beweis. □

Lemma 20.5. *Limiten erhalten Produkte.*

Beweis. XXXX □

Lemma 20.6. *Zusammenhängende Limiten erhalten Koprodukte.*

Beweis. XXXX □

$$\min_{i \in I} X(i) = \varprojlim_{i \in I} X(i) \quad (20.3)$$

$$\operatorname{ggT}_{i \in I} X(i) = \varprojlim_{i \in I} X(i) \quad (20.4)$$

$$\max_{i \in I} X(i) = \varinjlim_{i \in I} X(i) \quad (20.5)$$

$$\bigcap_{i \in I} X(i) = \varinjlim_{i \in I} X(i) \quad (20.6)$$

$$\operatorname{kgV}_{i \in I} X(i) = \varinjlim_{i \in I} X(i) \quad (20.7)$$

$$\bigcup_{i \in I} X(i) = \varinjlim_{i \in I} X(i) \quad (20.8)$$

20.2 Kolimiten

Definition 20.7 (Kolimes). *Ein Kolimes eines Diagramms $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein initiales Objekt in der Kokegelkategorie von F .*

Ist das Diagramm klein bzw. zusammenhängend, dann wird der Kolimes *klein* bzw. *zusammenhängend* genannt. Aus Lemma (2.4) folgt:

Korollar 20.8. *Kolimiten sind eindeutig bis auf Isomorphie.*

Der Kolimes eines Diagramms $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ wird daher auch als $\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} X_i$ bezeichnet. Es gilt:

$$\varinjlim(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}) \cong 0 \quad (20.9)$$

Der Kolimes eines kleinen bzw. zusammenhängenden Diagramms wird *kleiner* bzw. *zusammenhängender Kolimes* genannt.

Lemma 20.9. *Für ein Diagramm $X: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ mit einem terminalen Objekt $1 \in \operatorname{Ob} \mathcal{I}$ ist:*

$$\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} X_i \cong X_1. \quad (20.10)$$

Beweis. XXXX □

Lemma 20.10. *Kolimiten erhalten Produkte.*

Beweis. □

Lemma 20.11. *Zusammenhängende Kolimiten erhalten Koprodukte.*

Beweis. □

Lemma 20.12. *Ein Funktor erhält Kolimiten genau dann, wenn er initiale Objekte und zusammenhängende Kolimiten erhält.*

Beweis. □

Lemma 20.13. Für Kategorien $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ und $\mathbb{C}$ und einen Funktor $F: \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\varinjlim_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} F(i, j) \cong \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} F(i, j) \cong \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} F(i, j) \quad (20.11)$$

$$\varprojlim_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} F(i, j) \cong \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} \varprojlim_{j \in \mathcal{J}} F(i, j) \cong \varprojlim_{j \in \mathcal{J}} \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} F(i, j) \quad (20.12)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \varinjlim_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} F(i, j)) &\cong \varinjlim_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, F(i, j)) \\ &\cong \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, F(i, j)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} F(i, j)) \\ &\cong \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, F(i, j)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} F(i, j)) \end{aligned} \quad (20.13)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\varinjlim_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} F(i, j), B) &\cong \varinjlim_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F(i, j), B) \\ &\cong \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F(i, j), B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} F(i, j), B) \\ &\cong \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F(i, j), B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} F(i, j), B) \end{aligned} \quad (20.14)$$

□

Lemma 20.14. In **Set** kommutieren kleine Limiten mit gefilterten Kolimiten bis auf Isomorphie.

Beweis. □

$$(\varinjlim_{i \in I} X_i)^{\mathrm{op}} \cong \varinjlim_{i \in I} X_i \quad (20.15)$$

$$(\varprojlim_{i \in I} X_i)^{\mathrm{op}} \cong \varprojlim_{i \in I} X_i \quad (20.16)$$

Lemma 20.15. Für Kategorien $\mathcal{I}$ und $\mathbb{C}$ ist $\varinjlim_{i \in \mathcal{I}}: \mathbb{C}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{C}$ ein XXXX Funktor.

Beweis. XXXX □

Lemma 20.16. Für Kategorien $\mathcal{I}$ und $\mathbb{C}$ ist $\varprojlim_{i \in \mathcal{I}}: \mathbb{C}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{C}$ ein XXXX Funktor.

Beweis. XXXX □

Satz 20.17.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(\varinjlim_{i \in I} X_i, Y\right) \cong \varinjlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X_i, Y) \quad (20.17)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(X, \varprojlim_{i \in I} Y_i\right) \cong \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y_i) \quad (20.18)$$

Beweis. XXXX □

Die Isomorphismen können mit Lemma (XXXX) auch mithilfe der jeweils anderen gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim_{i \in I} X_i, Y) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y, (\varinjlim_{i \in I} X_i)^{\mathrm{op}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y, \varprojlim_{i \in I} X_i) \\ &\cong \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y, X_i) = \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y) \end{aligned} \quad (20.19)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \varprojlim_{i \in I} Y_i) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}((\varprojlim_{i \in I} Y_i)^{\mathrm{op}}, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(\varinjlim_{i \in I} Y_i, X) \\ &\cong \varinjlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y_i, X) = \varinjlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_i) \end{aligned} \quad (20.20)$$

Ein Funktor, der endliche Limiten (nach links zeigender Pfeil) erhält, wird *linksexakt* und ein Funktor, der endliche Kolimiten (nach rechts zeigender Pfeil) erhält, wird *rechtsexakt* genannt. Ein links- und rechtsexakter Funktor wird *exakt* genannt. Nach Satz (20.17) ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ für jedes Objekt $X \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}$ linksexakt. Nach Lemma (XXXX) ist $\varprojlim$ linksexakt und $\varinjlim$ rechtsexakt.

Lemma 20.18. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ sowie adjungierte Funktoren $F: \mathcal{C} \rightleftharpoons \mathcal{C}: G$ ist:

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} : F^n \dashv G^n \quad (20.21)$$

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} F^n \dashv \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} G^n \quad (20.22)$$

Beweis. □

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} F^n X, Y) &\cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F^n X, Y) \\ &\cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G^n Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} G^n Y) \end{aligned} \quad (20.23)$$

□

Satz 20.19. Für Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sowie adjungierte Funktoren $F: \mathcal{C} \rightleftharpoons \mathcal{D}: G$ mit $F \dashv G$ kommutiert F mit Kolimiten und G mit Limiten:

$$F(\varinjlim_{i \in I} X_i) \cong \varinjlim_{i \in I} F X_i \quad (20.24)$$

$$G(\varprojlim_{i \in I} Y_i) \cong \varprojlim_{i \in I} G Y_i \quad (20.25)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\varinjlim_{i \in I} X_i), Y) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim_{i \in I} X_i, GY) \cong \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, GY) \\ &\cong \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F X_i, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\varinjlim_{i \in I} F X_i, Y) \end{aligned} \quad (20.26)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(\varprojlim_{i \in I} Y_i)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F X, \varprojlim_{i \in I} Y_i) \cong \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F X, Y_i) \\ &\cong \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G Y_i) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \varprojlim_{i \in I} G Y_i) \end{aligned} \quad (20.27)$$

□

20.3 Filtriertheit und Vollständigkeit

Definition 20.20 (Filtierte Kategorie). *Eine Kategorie $\mathcal{C}$, für die jedes endliche Diagramm einen Kokegel besitzt wird filtriert genannt.*

Definition 20.21 ((Ko)vollständige Kategorie). *Eine Kategorie $\mathcal{C}$, für die jedes kleine Diagramm einen (Ko)limes besitzt wird (ko)vollständig genannt.*

Beispiel 20.22. *Für einen Vektorraum V ist die Menge aller endlich erzeugten Untervektorräume von V eine filtrierte Kategorie.*

Beispiel 20.23. *Für eine Gruppe G ist die Menge aller Normalteiler $N \triangleleft G$ mit endlichem Index, also für die $|G/N| < \infty$, eine kofiltrierte Kategorie.*

Beispiel 20.24. *Für eine Menge Y ist die Menge aller Paare $(X, f: X \rightarrow Y)$ mit einer endlichen Menge X eine filtrierte Kategorie.*

Beispiel 20.25. *Für ein Modul Y ist die Menge aller Module $(f, f: X \rightarrow Y)$ mit einem endlich präsentierten Modul Y eine filtrierte Kategorie.*

Lemma 20.26. *Für endlich kovollständige Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ genau dann rechtsexakt, wenn für alle $d \in \text{Ob } \mathcal{D}$ die Kommakategorie F/d filtriert ist.*

Beweis. XXXX

□

Lemma 20.27. *Für endlich vollständige Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ genau dann linksexakt, wenn für alle $d \in \text{Ob } \mathcal{D}$ die Kommakategorie $(d \backslash F)^{\text{op}}$ filtriert ist.*

Beweis. XXXX

□

Kapitel 21

Funktoren

Für zwei Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ betrachte die Abbildungen:

$$F_{\text{Ob}}: \text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } (\mathcal{D}) \quad (21.1)$$

$$F_{\text{Hom}}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_{\text{Ob}}(X), F_{\text{Ob}}(Y)) \quad (21.2)$$

Da aufgrund der verschiedenen Notation von Objekten (Großbuchstaben) und Morphismen (Kleinbuchstaben) klar ist, welche Abbildung gemeint ist werden im folgenden meist beide mit F bezeichnet.

Definition 21.1 (Kovarianter Funktor). *Erfüllen die Abbildungen die Eigenschaften:*

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)} \quad (21.3)$$

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad (21.4)$$

bilden sie einen kovarianten Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Ein kovarianter Funktor bildet kommutative Diagramme auf kommutative Diagramme ab:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f \circ g} & Z \\ & \searrow g & \nearrow f \\ & Y & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{F(f \circ g) = Ff \circ Fg} & FZ \\ & \searrow Fg & \nearrow Ff \\ & FY & \end{array}$$

Definition 21.2 (Kontravarianter Funktor). *Erfüllen die Abbildungen die Eigenschaften:*

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)} \quad (21.5)$$

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f) \quad (21.6)$$

bilden sie einen kontravarianten Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Ein kontravarianter Funktor bildet kommutative Diagramme auf kommutative Diagramme ab:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f \circ g} & Z \\ & \searrow g & \nearrow f \\ & Y & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} FX & \xleftarrow{F(f \circ g) = Fg \circ Ff} & FZ \\ & \searrow Fg & \nearrow Ff \\ & FY & \end{array}$$

Statt $F(X)$ und $F(f)$ wird auch FX und Ff geschrieben.

Aus der Definition folgt, dass $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, womit $Ff \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, FY)$:

$$\text{dom}(Ff) = FX = F(\text{dom } f) \quad (21.7)$$

$$\text{cod}(Ff) = FY = F(\text{cod } f) \quad (21.8)$$

und das Bestimmen von Quelle und Ziel mit einem kovarianten Funktor vertauscht.

Aus der Definition folgt, dass $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, womit $Ff \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, FX)$:

$$\text{dom}(Ff) = FY = F(\text{cod } f) \quad (21.9)$$

$$\text{cod}(Ff) = FX = F(\text{dom } f) \quad (21.10)$$

und das Bestimmen von Quelle und Ziel mit einem kontravarianten Funktor vertauscht.

Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ wird *Endofunktor* genannt.

$$\text{Ob } \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}, \left(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \right) \mapsto \left(\text{Ob } \mathcal{C} \xrightarrow{F_{\text{Ob}}} \text{Ob } \mathcal{D} \right) \quad (21.11)$$

$$\text{Ar } \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}, \left(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \right) \mapsto \left(\text{Ar } \mathcal{C} \xrightarrow{F_{\text{Hom}}} \text{Ar } \mathcal{D} \right) \quad (21.12)$$

Definition 21.3 (Identitätsfunktor). *Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ ist der Endofunktor:*

$$\text{id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, X \mapsto X, f \mapsto f \quad (21.13)$$

der Identitätsfunktor auf der Kategorie.

Definition 21.4 (kofinal). *Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ für den $\forall Y \in \text{Ob } \mathcal{D} \exists X \in \text{Ob } \mathcal{C} \exists f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, FX)$ und für den für zwei solcher Objekte $Y, Y' \in \text{Ob } \mathcal{D}$ und zwei solcher Morphismen $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, FX), f' \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y', FX)$ ein Objekt $Z \in \text{Ob } \mathcal{D}$*

Funktoren erhalten nicht unbedingt Mono- und Epimorphismen, jedoch gilt:

Lemma 21.5. *Kovariante und kontravariante Funktoren erhalten Isomorphismen.*

Beweis. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein kovarianter Funktor, $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ Objekte und $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ein Isomorphismus, dann ist $Ff \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$ ebenso einer, da:

$$Ff \circ Ff^{-1} = F(f \circ f^{-1}) = F \text{id}_X = \text{id}_{FX} \quad (21.14)$$

$$Ff^{-1} \circ Ff = F(f^{-1} \circ f) = F \text{id}_Y = \text{id}_{FY} \quad (21.15)$$

Analog für kontravariante Funktoren. $\square$

Darauf folgt, dass Isomorphie unter einem Funktor erhalten bleibt, also isomorphe Objekte wieder auf isomorphe Objekte abgebildet werden.

Lemma 21.6. *Kovariante Funktoren erhalten Retraktionen und Koretraktionen, kontravariante Funktoren wandeln sie in die jeweils andere um.*

Beweis. $\square$

Cat ist die *Kategorie der kleinen Kategorien*, deren Objekte alle kleinen Kategorien und deren Morphismen alle kovarianten Funktoren sind:

$$\text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) := \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \quad (21.16)$$

Da die terminale Kategorie $\mathcal{T}$ nur ein Objekt und einen Morphismus enthält, gibt es von jeder beliebigen anderen kleinen Kategorie $\mathcal{C}$ nur einen Funktor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{T}$ in diese, womit $\mathcal{T}$ ein terminales Objekt in **Cat** ist, was den Namen rechtfertigt.

21.1 Duale Funktoren

Definition 21.7 (Dualer Funktor). Für Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ und einen Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist der Funktor $F^{\text{op}}: \mathcal{D}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ der Objekte und Morphismen genauso wie F abbildet, der duale Funktor.

$\cdot^{\text{op}}: \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Cat}$ ist damit ein kontravarianter Funktor.

21.2 Volltreue Funktoren und Einbettungen

Definition 21.8 (Treue, volle und volltreue Funktoren). Für Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ wird ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ für den für alle Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ die Abbildung:

$$F_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY), f \mapsto Ff \quad (21.17)$$

injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv ist, treu bzw. voll bzw. volltreu (oder völlig treu) genannt.

Da die Komposition von injektiven bzw. surjektiven bzw. bijektiven Abbildungen wieder injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv ist, folgt:

Korollar 21.9. Die Komposition von treuen Funktoren ist treu.

Korollar 21.10. Die Komposition von vollen Funktoren ist voll.

Korollar 21.11. Die Komposition von volltreuen Funktoren ist volltreu.

Andere Lemmata über Injektivität, Surjektivität und Bijektivität lassen sich ebenfalls (fast) analog übertragen.

Lemma 21.12. Ist $G \circ F$ treu, dann ist F treu.

Beweis. Für $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist $(G \circ F)_{X,Y} = G_{FX,FY} \circ F_{X,Y}$ injektiv, womit $F_{X,Y}$ injektiv ist, womit F treu ist. $\square$

Lemma 21.13. Ist $G \circ F$ voll und F surjektiv auf Objekten, dann ist G voll.

Beweis. Für $X', Y' \in \text{Ob } \mathcal{D}$ gibt es $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ mit $FX = X'$ und $FY = Y'$. $(G \circ F)_{X,Y} = G_{FX,FY} \circ F_{X,Y} = G_{X',Y'} \circ F_{X,Y}$ ist surjektiv, womit $G_{X',Y'}$ surjektiv ist, womit G voll ist. $\square$

Lemma 21.14. Ist $G \circ F$ treu und F voll sowie surjektiv auf Objekten, dann ist G treu.

Beweis. Für $X', Y' \in \text{Ob } \mathcal{D}$ gibt es $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ mit $FX = X'$ und $FY = Y'$. $(G \circ F)_{X,Y} = G_{FX,FY} \circ F_{X,Y} = G_{X',Y'} \circ F_{X,Y}$ ist injektiv und da $F_{X,Y}$ surjektiv ist, ist $G_{X',Y'}$ injektiv, womit G treu ist. $\square$

Lemma 21.15. Ist $G \circ F$ voll und G treu, dann ist F voll.

Beweis. Für $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist $(G \circ F)_{X,Y} = G_{FX,FY} \circ F_{X,Y}$ surjektiv und da $G_{FX,FY}$ injektiv ist, ist $F_{X,Y}$ surjektiv, womit F voll ist. $\square$

Durch Kombination folgt:

Lemma 21.16. Ist $G \circ F$ volltreu und F surjektiv auf Objekten und voll, dann ist G volltreu.

Beweis. $G \circ F$ ist treu, nach Lemma (21.14) ist G treu. $G \circ F$ ist voll, nach Lemma (21.13) ist G voll. G ist daher volltreu. $\square$

Lemma 21.17. *Ist $G \circ F$ volltreu und G treu, dann ist F volltreu.*

Beweis. $G \circ F$ ist treu, nach Lemma (21.12) ist F voll. $G \circ F$ ist voll, nach Lemma (21.15) ist F treu. F ist daher volltreu. $\square$

Lemma 21.18. *Treue Funktoren reflektieren Mono- und Epimorphismen (also ebenso Bimorphismen).*

Beweis. Sei $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ ein Funktor und $f: Y \rightarrow Z$ ein Morphismus in $\mathbb{C}$, sodass $Ff: FY \rightarrow FZ$ ein Monomorphismus ist. Seien $g, h: X \rightarrow Y$ Morphismen in $\mathbb{C}$, dann ist:

$$\begin{aligned} f \circ g = f \circ h &\Rightarrow Ff \circ Fg = F(f \circ g) = F(f \circ h) = Ff \circ Fh \\ &\xrightarrow{Ff \text{ episch}} Fg = Fh \xrightarrow{F \text{ treu}} g = h. \end{aligned} \quad (21.18)$$

$\square$

Lemma 21.19. *Für Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ sowie einen Funktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ ist ein Morphismus $f \in \text{Ar } \mathbb{C}$ genau dann ein Isomorphismus, wenn $Ff \in \text{Ar } \mathbb{D}$ einer ist.*

Beweis. XXXX $\square$

Definition 21.20 (Einbettung). *Für Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ wird ein Funktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$, für den F_{Hom} injektiv ist, Einbettung genannt.*

Satz 21.21. *Für Kategorien $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ und eine Einbettung $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ bilden jeweils die Objekte $FX, X \in \text{Ob } \mathbb{C}$ und Morphismen $Ff, f \in \text{Ar } \mathbb{C}$ eine Unterkategorie von $\mathbb{D}$, die als $F(\mathbb{C})$ bezeichnet wird.*

Beweis. $\square$

Satz 21.22. *Für Kategorien $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ und eine volle Einbettung $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ ist $F(\mathbb{C})$ eine volle Unterkategorie von $\mathbb{D}$.*

Beweis. $\square$

21.3 Subfunktoren

Definition 21.23 (Subfunktor). *Für eine Kategorie $\mathbb{C}$ und einen (kovarianten) Funktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ ist ein (kovarianter) Funktor $G: \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, für den:*

$$I.) \quad \forall X \in \text{Ob } \mathbb{C}: GX \subseteq FX$$

$$II.) \quad \forall X, Y \in \text{Ob } \mathbb{C} \forall f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y): Gf = Ff|_{GX}$$

ein Subfunktor von F , notiert als $G \subseteq F$.

Kapitel 22

Funktoralgebren und -koalgebren

Definition 22.1 (Funktoralgebra). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und einen Endofunktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ist ein Tupel (X, f) aus einem Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einem Morphismus $f: FX \rightarrow X$ eine F -Algebra.

Für F -Algebren (X, f) und (Y, g) wird ein Morphismus $\phi: X \rightarrow Y$ mit $g \circ F\phi = \phi \circ f$, also für den das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{f} & X \\ F\phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ FY & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

kommutiert, ein F -Algebrenmorphismus genannt. XXXX Daher bilden die F -Algebren und F -Algebrenhomomorphismen eine Kategorie, die als $\mathbf{Alg}(F)$ bezeichnet wird. Ein initiales Objekt in dieser Kategorie wird *initiale F -Algebra* genannt und der eindeutige Morphismen von dieser in eine andere F -Algebra wird *Katamorphismus* genannt.

Definition 22.2 (Funktorkoalgebra). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und einen Endofunktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ist ein Tupel (X, f) aus einem Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einem Morphismus $f: X \rightarrow FX$ eine F -Koalgebra.

Für F -Koalgebren (X, f) und (Y, g) wird ein Morphismus $\phi: X \rightarrow Y$ mit $g \circ \phi = F\phi \circ f$, also für den das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & FX \\ \phi \downarrow & & \downarrow F\phi \\ Y & \xrightarrow{g} & FY \end{array}$$

kommutiert, ein F -Algebrenmorphismus genannt. XXXX Daher bilden die F -Koalgebren und F -Koalgebrenhomomorphismen eine Kategorie, die als $\mathbf{Coalg}(F)$ bezeichnet wird. Ein terminales Objekt in dieser Kategorie wird *terminale F -Koalgebra* genannt und der eindeutige Morphismen von einer anderen F -Koalgebra in diese wird *Anamorphismus* genannt. Die Komposition eines Kata- mit einem nachfolgenden Anamorphismus wird *Metamorphismus* genannt. Die Komposition eines Ana- mit einem nachfolgenden Kata-morphismus wird *Hylomorphismus* genannt.

Kapitel 23

Externer Hom-Funktor

Sei $\mathbb{C}$ eine lokal kleine Kategorie. $\text{Hom}_{\mathbb{C}}$ kann als Abbildung aufgefasst werden, die zwei Objekten $X, Y \in \text{Ob } \mathbb{C}$ eine Menge $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)$, also ein Element von $\text{Ob } \mathbf{Set}$, zuordnet. Wenn $\text{Hom}_{\mathbb{C}}$ nun geeignet auch für Morphismen definiert wird, kann er zu einem Funktor verallgemeinert werden, der *externer Hom-Funktor* genannt wird.

Für zwei weitere Objekte $X', Y' \in \text{Ob } \mathbb{C}$ und Morphismen $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, X'), g \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(Y, Y')$ sei:

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(f, Y): \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X', Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y), \xi \mapsto \xi \circ f \quad (23.1)$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, g): \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y'), \xi \mapsto g \circ \xi \quad (23.2)$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(f, g): \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X', Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y'), \xi \mapsto g \circ \xi \circ f \quad (23.3)$$

also sodass die Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} (X, Y) & \xrightarrow{(f, \text{id}_Y)} & (X', Y) \\ (\text{id}_X, g) \downarrow & \searrow (f, g) & \downarrow (\text{id}_{X'}, g) \\ (X, Y') & \xrightarrow{(f, Y')} & (X', Y') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y) & \xleftarrow{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(f, Y)} & \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X', Y) \\ \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, g) \downarrow & \swarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(f, g) & \downarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X', g) \\ \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y') & \xleftarrow{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(f, Y')} & \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X', Y') \end{array}$$

kommutieren.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(f, g) &= \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, g) \circ \text{Hom}_{\mathbb{C}}(f, Y) \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{C}}(f, Y') \circ \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X', g) \end{aligned} \quad (23.4)$$

zudem folgt:

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\text{id}_X, g) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, g) \quad (23.5)$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(f, \text{id}_Y) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(f, Y) \quad (23.6)$$

Für ein festes Objekt $X \in \text{Ob } \mathbb{C}$ ist nun $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, -): \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein kovarianter Funktor, denn aus Gleichung () lässt sich ablesen:

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, \text{id}_Y) = \text{id}_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)} \quad (23.7)$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, g \circ g') = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, g) \circ \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, g') \quad (23.8)$$

Für ein festes Objekt $Y \in \text{Ob } \mathbb{C}$ ist nun $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, Y): \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein kontravarianter Funktor bzw. kovariant als $\mathbb{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, denn aus Gleichung () lässt sich ablesen:

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\text{id}_X, Y) = \text{id}_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)} \quad (23.9)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f \circ f', Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f', Y) \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Y) \quad (23.10)$$

Damit ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -): \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein kovarianter Funktor, denn aus Gleichung (23.10) lässt sich ablesen:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)} \quad (23.11)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f \circ f', g \circ g') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f', g) \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g') \quad (23.12)$$

Kapitel 24

Funktorkategorie

Definition 24.1 (Funktorkategorie). Für zwei Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ ist:

$$\mathbf{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D}) \quad (\text{auch } \mathbf{Funct}(\mathbb{C}, \mathcal{D}), \mathbf{Mor}(\mathbb{C}, \mathcal{D}) \text{ oder } \mathcal{D}^{\mathbb{C}}) \quad (24.1)$$

mit der Setzung:

$$\mathbf{Ob} \mathbf{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D}): \text{Klasse aller Funktoren } F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D} \quad (24.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D})}(F, G) := \{ \eta: F \Rightarrow G \mid F, G \in \mathbf{Ob} \mathbf{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D}) \} \\ (\text{Klasse aller natürlichen Transformationen } \eta: F \Rightarrow G) \end{aligned} \quad (24.3)$$

ihre Funktorkategorie.

Die Funktorkategorie ist tatsächlich eine Kategorie.

Beweis. Für einen Endofunktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ existiert stets

Zudem ist nach Satz () die vertikale Verkettung von natürlichen Transformationen, den Morphismen auf der Funktorkategorie, wieder eine natürliche Transformation. $\square$

Lemma 24.2. Für Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ ist:

$$\mathbf{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D})^{\text{op}} \cong \mathbf{Fct}(\mathbb{C}^{\text{op}}, \mathcal{D}^{\text{op}}). \quad (24.4)$$

Beweis. XXXX $\square$

$\mathbf{Fct}$ kann als Abbildung aufgefasst werden, die zwei lokal kleinen Kategorien $\mathbb{C}, \mathcal{D} \in \mathbf{Ob}$ eine lokal kleine Kategorie $\mathbf{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D})$, also ein Element aus $\mathbf{Ob}$, zuordnet. Wenn $\mathbf{Fct}$ nun geeignet auch für Morphismen definiert wird, kann er zu einem Funktor verallgemeinert werden, der *Funktorkategorie-Funktor* genannt wird.

Für zwei weitere lokal kleine Kategorien $\mathbb{C}', \mathcal{D}' \in \mathbf{Ob}$ und Funktoren $F \in \mathbf{Ob} \mathbf{Fct}(\mathbb{C}, \mathbb{C}')$, $G \in \mathbf{Ob} \mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$

$$\mathbf{Fct}(F, \mathcal{D}): \mathbf{Fct}(\mathbb{C}', \mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D}), \Xi \mapsto \Xi \circ F \quad (24.5)$$

$$\mathbf{Fct}(\mathbb{C}, G): \mathbf{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D}'), \Xi \mapsto G \circ \Xi \quad (24.6)$$

$$\mathbf{Fct}(F, G): \mathbf{Fct}(\mathbb{C}', \mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D}'), \Xi \mapsto G \circ \Xi \circ F \quad (24.7)$$

also sodass die Diagramme:

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{C}, \mathcal{D}) & \xrightarrow{(F, \mathcal{D})} & (\mathbb{C}', \mathcal{D}) \\
 \downarrow (\mathbb{C}, G) & \searrow (F, G) & \downarrow (\mathbb{C}', G) \\
 (\mathbb{C}, \mathcal{D}') & \xrightarrow{(F, \mathcal{D}')} & (\mathbb{C}', \mathcal{D}')
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \text{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D}) & \xleftarrow{\text{Fct}(F, \mathcal{D})} & \text{Fct}(\mathbb{C}', \mathcal{D}) \\
 \downarrow \text{Fct}(\mathbb{C}, G) & \swarrow \text{Fct}(F, G) & \downarrow \text{Fct}(\mathbb{C}', G) \\
 \text{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D}') & \xleftarrow{\text{Fct}(F, \mathcal{D}')} & \text{Fct}(\mathbb{C}', \mathcal{D}')
 \end{array}$$

kommutieren. Für eine feste lokal kleine Kategorie $\mathbb{C} \in \text{Ob}$ ist nun $\text{Fct}(\mathbb{C}, -): \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Cat}$ ein kovarianter Funktor, denn aus Gleichung () lässt sich ablesen:

$$\text{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D}) =_{\text{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D})} \quad (24.8)$$

$$\text{Fct}(\mathbb{C}, G \circ G') = \text{Fct}(\mathbb{C}, G) \circ \text{Fct}(\mathbb{C}, G') \quad (24.9)$$

Für eine feste lokal kleine Kategorie $\mathcal{D} \in \text{Ob}$ ist nun $\text{Fct}(-, \mathcal{D}): \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Cat}$ ein kontravarianter Funktor bzw. kovariant als $\mathbf{Cat}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Cat}$, denn aus Gleichung () lässt sich ablesen:

$$\text{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D}) =_{\text{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D})} \quad (24.10)$$

$$\text{Fct}(F \circ F', \mathcal{D}) = \text{Fct}(F', \mathcal{D}) \circ \text{Fct}(F, \mathcal{D}) \quad (24.11)$$

Damit ist $\text{Fct}: \mathbf{Cat}^{\text{op}} \times \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Cat}$ ein kovarianter Funktor, denn aus Gleichung () lässt sich ablesen:

$$\text{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D}) =_{\text{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D})} \quad (24.12)$$

$$\text{Fct}(F \circ F', G \circ G') = \text{Fct}(F', G) \circ \text{Fct}(F, G') \quad (24.13)$$

Es ist also $\text{Fct} \in \text{Ob Fct}(\mathbf{Cat}^{\text{op}} \times \mathbf{Cat}, \mathbf{Cat})$.

Definition 24.3 (Endofunktorkategorie). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist:*

$$\text{End } \mathbb{C} := \text{Fct}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \quad (24.14)$$

ihre Endofunktorkategorie.

Kapitel 25

Natürliche Transformationen

Definition 25.1 (Natürliche Transformationen). Für Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sowie Funktoren $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ bilden Morphismen $\eta_X \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, GX)$ für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ für die für jeden Morphismus $f: X \rightarrow Y$ in $\mathcal{C}$:

$$Gf \circ \eta_X = \eta_Y \circ Ff \quad (25.1)$$

also für die das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\eta_X} & GX \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FY & \xrightarrow{\eta_Y} & GY \end{array}$$

kommutiert, eine natürliche Transformation $\eta: F \Rightarrow G$.

Die Klasse aller natürlichen Transformationen $\eta: F \rightarrow G$ zwischen Funktoren $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ für zwei Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ ist:

$$\text{Nat}(F, G) \quad (25.2)$$

25.1 Vertikale und horizontale Verkettung

Definition 25.2 (Vertikale Verkettung). Für Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$, Funktoren $F, G, H: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ sowie natürliche Transformationen $\alpha: F \Rightarrow G$ und $\beta: G \Rightarrow H$ ist $\beta \circ \alpha: F \Rightarrow H$ mit:

$$\bigvee_{X \in \text{Ob } \mathcal{C}} : (\beta \circ \alpha)_X = \beta_X \circ \alpha_X \quad (25.3)$$

die vertikale Verkettung.

Die vertikale Verkettung ist eine natürliche Transformation.

Beweis.

$$\begin{aligned} \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y): Hf \circ (\beta \circ \alpha)_X &= Hf \circ \beta_X \circ \alpha_X \\ &\stackrel{\beta \text{ n.T.}}{=} \beta_Y \circ Gf \circ \alpha_X \\ &\stackrel{\alpha \text{ n.T.}}{=} \beta_Y \circ \alpha_Y \circ Ff = (\beta \circ \alpha)_Y \circ Ff \end{aligned} \quad (25.4)$$

□

Definition 25.3 (Horizontale Verkettung). Für Kategorien $\mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$, Funktoren $F, F': \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G, G': \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ sowie natürliche Transformationen $\alpha: F \Rightarrow F'$ und $\beta: G \Rightarrow G'$ ist $\beta \circ \alpha: GF \Rightarrow G'F'$ mit:

$$\forall_{X \in \text{Obj } \mathbb{C}} : (\beta \circ \alpha)_X = G\alpha_X \circ \beta_{F'X} \quad (25.5)$$

die horizontale Verkettung.

Die vertikale Verkettung ist eine natürliche Transformation.

Beweis. XXXX □

25.2 Induzierte natürliche Transformationen

Seien $A, A': \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren und $\phi: A \Rightarrow A'$ eine natürliche Transformation. Sei $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ ein Funktor, dann gibt es eine natürliche Transformation $F_*\phi: F_*A \Rightarrow F_*A'$ mit $(F_*\phi)_X = F\phi_X$, wobei für jeden Morphismus $f: X \rightarrow Y$ in $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} FA'f \circ (F_*\phi)_X &= FA'f \circ F\phi_X = F(A'f \circ \phi_X) \\ &= F(\phi_Y \circ Af) = F\phi_Y \circ FAf = (F_*\phi)_Y \circ FAf \end{aligned} \quad (25.6)$$

$$\begin{array}{ccc} AX & \xrightarrow{\phi_X} & A'X \\ Af \downarrow & & \downarrow A'f \\ AY & \xrightarrow{\phi_Y} & A'Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} FAX & \xrightarrow{F\phi_X} & FA'X \\ FAf \downarrow & & \downarrow FA'f \\ FAY & \xrightarrow{F\phi_Y} & FA'Y \end{array}$$

Korollar 25.4. Ist ϕ ein natürlicher Isomorphismus, dann ist $F_*\phi$ einer.

Korollar 25.5. Natürliche Isomorphie bleibt unter Nachkomposition erhalten.

Seien $B, B': \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ Funktoren und $\psi: B \Rightarrow B'$ eine natürliche Transformation. Sei $G: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor, dann gibt es eine natürliche Transformation $G^*\psi: G^*B \Rightarrow G^*B'$ mit $(G^*\psi)_X = \psi_{GX}$, wobei für jeden Morphismus $f: X \rightarrow Y$ in $\mathbb{C}$:

$$B'Gf \circ (G^*\psi)_X = B'Gf \circ \psi_{GX} = \psi_{GY} \circ BGf = (G^*\psi)_Y \circ BGf \quad (25.7)$$

$$\begin{array}{ccc} BGX & \xrightarrow{\psi_{GX}} & B'GX \\ BGf \downarrow & & \downarrow B'Gf \\ BGY & \xrightarrow{\psi_{GY}} & B'GY \end{array}$$

Korollar 25.6. Ist ψ ein natürlicher Isomorphismus, dann ist $G^*\psi$ einer.

Korollar 25.7. Natürliche Isomorphie bleibt unter Vorkomposition erhalten.

Seien $F, G: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren und $\eta: F \Rightarrow G$ eine natürliche Transformation. Für die durch Vorkomposition erzeugten Funktoren $F^*, G^*: \text{Fct}(\mathcal{E}, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Fct}(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ soll eine von η erzeugte natürliche Transformation $\eta^*: F^* \Rightarrow G^*$ und für die durch Nachkomposition erzeugten Funktoren $F_*, G_*: \text{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{E})$ soll eine von η erzeugte natürliche Transformation $\eta_*: F_* \Rightarrow G_*$ gefunden werden. Für $A \in \text{Fct}(\mathcal{E}, \mathbb{C})$ und $B \in \text{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ sind:

$$(\eta^*)_A: F^*A \Rightarrow G^*A \quad (25.8)$$

$$(\eta_*)_B: F_*B \Rightarrow G_*B \quad (25.9)$$

jeweils Morphismen in $\text{Fct}(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ und $\text{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, also wieder natürliche Transformationen. Für $A' \in \text{Fct}(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ und $B' \in \text{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ sowie natürliche Transformationen $\phi: A \Rightarrow A'$ und $\psi: B \Rightarrow B'$ soll gelten:

$$G^*\phi \circ (\eta^*)_A = (\eta^*)_{A'} \circ F^*\phi \quad (25.10)$$

$$G_*\psi \circ (\eta_*)_B = (\eta_*)_{B'} \circ F_*\psi \quad (25.11)$$

Mit Objekten $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ folgt mit Gleichung (25.3):

$$\phi_{GX} \circ ((\eta^*)_A)_X = (G^*\phi)_X \circ ((\eta^*)_A)_X = ((\eta^*)_{A'})_X \circ (F^*\phi)_X = ((\eta^*)_{A'})_X \circ \phi_{FX} \quad (25.12)$$

$$G\psi_Y \circ ((\eta_*)_B)_Y = (G_*\psi)_Y \circ ((\eta_*)_B)_Y = ((\eta_*)_{B'})_Y \circ (F_*\psi)_Y = ((\eta_*)_{B'})_Y \circ F\psi_Y \quad (25.13)$$

$$\begin{array}{ccc} AFX & \xrightarrow{((\eta^*)_A)_X} & AGX \\ \phi_{FX} \downarrow & & \downarrow \phi_{GX} \\ A'FX & \xrightarrow{((\eta^*)_{A'})_X} & A'GX \end{array} \quad \begin{array}{ccc} FBY & \xrightarrow{((\eta_*)_B)_Y} & GBY \\ F\psi_Y \downarrow & & \downarrow G\psi_Y \\ FB'Y & \xrightarrow{((\eta_*)_{B'})_Y} & GB'Y \end{array}$$

Passende Definitionen sind daher:

$$((\eta^*)_A)_X = A\eta_X \quad (25.14)$$

$$((\eta_*)_B)_Y = \eta_{BY} \quad (25.15)$$

Korollar 25.8. Wenn η ein natürlicher Isomorphismus ist, dann sind η^* und η_* ebenso natürliche Isomorphismen.

25.3 Natürliche Isomorphismen

Lemma 25.9. Für Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$, Funktoren $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ sind für eine natürliche Transformation $\eta: F \Rightarrow G$ äquivalent:

I.) Es gibt eine natürliche Transformation $\zeta: G \Rightarrow F$ mit $\zeta \circ \eta = \text{id}_F$ und $\eta \circ \zeta = \text{id}_G$. η ist also ein Isomorphismus in $\text{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

II.) $\eta_X: FX \rightarrow GX$ ist für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ein Isomorphismus in $\mathcal{D}$.

Beweis. I.) $\Rightarrow$ II.): $\zeta_X \circ \eta_X = (\zeta \circ \eta)_X = (\text{id}_F)_X = \text{id}_{FX}$ und $\eta_X \circ \zeta_X = (\eta \circ \zeta)_X = (\text{id}_G)_X = \text{id}_{GX}$ $\square$

Definition 25.10 (Natürlicher Isomorphismus). Eine natürliche Transformation, für welche die äquivalenten Bedingungen von Lemma (25.9) erfüllt sind, wird natürlicher Isomorphismus genannt.

Korollar 25.11. Sind F und G natürlich isomorphe Funktoren, dann sind HF und HG sowie FI und GI natürlich isomorphe Funktoren.

25.4 Interner Hom-Funktor

Definition 25.12 (Interner Hom-Funktor). Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit einem Vergissfunktor $\text{忘}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ wird ein (kovarianter) Funktor $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}}(-, -): \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ mit:

$$\text{忘} \circ \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}}(-, -) \cong \text{Hom}(-, -) \quad (25.16)$$

ein interner Hom-Funktor genannt.

Kapitel 26

Ende und Koende

26.1 Ende

Definition 26.1 (Ende). Für Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, einen Funktor $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ besteht ein Ende (E, ϕ) von F aus:

I.) einem Objekt $E \in \text{Ob } \mathcal{D}$

II.) einem Morphismus $\phi_X \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F(X, X))$ für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, sodass:

$$\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C} \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y): F(X, f) \circ \phi_X = \phi_Y \circ F(f, Y) \quad (26.1)$$

also für die das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi_X} & F(X, X) \\ \phi_Y \downarrow & & \downarrow F(X, f) \\ F(Y, Y) & \xrightarrow{F(f, Y)} & F(X, Y) \end{array}$$

kommutiert.

Lemma 26.2. Das Ende ist universell, ist (E', ϕ') ein anderes Ende, dann:

$$\exists! \omega \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E', E) \forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}: \phi'_X = \phi_X \circ \omega \quad (26.2)$$

also für den das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{\omega} & E' \\ \phi_X \searrow & & \swarrow \phi'_X \\ & X & \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. XXXX □

Das Ende wird daher meist notiert als:

$$E \cong \int_{X \in \mathcal{C}} F(X, X) \quad (26.3)$$

Satz 26.3. Für lokal kleine Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ sowie Funktoren $F, G: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist die Klasse $\text{Nat}(F, G)$ der natürlichen Transformationen zwischen ihnen ein Ende des Funktors $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, G-): \mathbb{C}^{\text{op}} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Set}$:

$$\text{Nat}(F, G) \cong \int_{X \in \mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, GX). \quad (26.4)$$

Dieser Satz erklärt die Notation des Endes durch ein Integral. Ähnlich wie dieses infinitesimale Flächenstücke zu einer großen Fläche zusammensetzt, besteht eine natürliche Transformation in $\text{Nat}(F, G)$ aus zahlreichen Morphismen in $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, GX)$.

Beweis. Für ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist der entsprechende Strukturmorphismus $\phi_X: \text{Nat}(F, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, GX)$, $\phi_X(\eta) = \eta_X$ des Endes genau die Zuweisung des entsprechenden Strukturmorphismus der natürlichen Transformation. Das entsprechende Diagramm des Endes:

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(F, G) & \xrightarrow{\phi_X} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, GX) \\ \phi_Y \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, Gf) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, GY) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Ff, GY)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, GY) \end{array}$$

kommutiert, da das entsprechende Diagramm der natürlichen Transformation kommutiert. Mit $\eta: F \Rightarrow G$ und Gleichung (25.1) ist:

$$\begin{aligned} (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, Gf) \circ \phi_X)(\eta) &= (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, Gf)(\eta_X) = Gf \circ \eta_X \stackrel{(25.1)}{=} \eta_Y \circ Ff \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Ff, GY)(\eta_Y) = (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Ff, GY) \circ \phi_Y)(\eta). \end{aligned} \quad (26.5)$$

□

Lemma 26.4. Für Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$, einen Funktor $F: \mathbb{C}^{\text{op}} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und ein Objekt $D \in \text{Ob } \mathcal{D}$ gilt:

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}\left(D, \int_{C \in \mathbb{C}} F(C, C)\right) \cong \int_{C \in \mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, F(C, C)). \quad (26.6)$$

Beweis. XXXX

□

26.2 Koende

Definition 26.5 (Koende). Für Kategorien $\mathbb{C}, \mathcal{D}$, einen Funktor $F: \mathbb{C}^{\text{op}} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ besteht ein Koende (D, ψ) von F aus:

I.) einem Objekt $D \in \text{Ob } \mathcal{D}$

II.) einem Morphismus $\psi_X \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X, X), D)$ für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, sodass:

$$\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C} \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X): \psi_X \circ F(X, f) = \psi_Y \circ F(f, Y) \quad (26.7)$$

also für die das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} F(X, Y) & \xrightarrow{F(X, f)} & F(X, X) \\ F(f, Y) \downarrow & & \downarrow \psi_X \\ F(Y, Y) & \xrightarrow{\psi_Y} & D \end{array}$$

kommutiert.

Lemma 26.6. *Das Koende ist universell, ist (D', ψ') ein anderes Koende, dann:*

$$\exists! \omega \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, D') \forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}: \psi'_X = \omega \circ \psi_X \quad (26.8)$$

also für den das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \psi_X \swarrow & & \searrow \psi'_X \\ D & \xrightarrow{\omega} & D' \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. XXXX □

Das Koende wird daher meist notiert als:

$$D \cong \int^{X \in \mathcal{C}} F(X, X) \quad (26.9)$$

Lemma 26.7. *Für Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$, einen Funktor $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und ein Objekt $D \in \text{Ob } \mathcal{D}$ gilt:*

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}} \left(\int^{C \in \mathcal{C}} F(C, C), D \right) \cong \int_{C \in \mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C, C), D). \quad (26.10)$$

Beweis. XXXX □

Satz 26.8 (Darstellungssatz, kovariant). *Für Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$, wobei letztere alle Koprodukte besitzt, und einen kovarianten Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ gilt:*

$$F \cong \int^{C \in \mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -) \times FC. \quad (26.11)$$

Beweis. Sei $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein kovarianter Funktor, dann folgt mit Satz (26.3), dem Yoneda-Lemma (42.4) und Lemma (26.7):

$$\begin{aligned} \text{Nat}(F, G) &\cong \int_{C \in \mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, GC) \stackrel{\text{y}}{\cong} \int_{C \in \mathcal{C}} \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -), \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, G-)) \\ &\cong \int_{C \in \mathcal{C}} \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -) \times FC, G) \cong \text{Nat} \left(\int^{C \in \mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -) \times FC, G \right), \end{aligned} \quad (26.12)$$

womit die Behauptung aus dem Yoneda-Lemma folgt. □

Satz 26.9 (Darstellungssatz, kontravariant). *Für Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$, wobei letztere alle Koprodukte besitzt, und einen kontravarianten Funktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ gilt:*

$$F \cong \int^{C \in \mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) \times FC. \quad (26.13)$$

Beweis. Sei $G: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein kontravarianter Funktor, dann folgt mit Satz (26.3), dem Yoneda-Lemma nach (42.5) und Lemma (26.7):

$$\begin{aligned} \text{Nat}(G, F) &\cong \int_{C \in \mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(GC, GF) \stackrel{\text{Y}}{\cong} \int_{C \in \mathbb{C}} \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C), \text{Hom}_{\mathcal{D}}(G-, FC)) \\ &\cong \int_{C \in \mathbb{C}} \text{Nat}(G, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -) \times FC) \cong \text{Nat}\left(G, \int^{C \in \mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) \times FC\right), \end{aligned} \quad (26.14)$$

womit die Behauptung aus dem Yoneda-Lemma folgt. $\square$

Kapitel 27

Profunktoren

Definition 27.1 (Profunktor). Für Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ ist ein Funktor der Form $F: \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein Profunktor $F: \mathbb{C} \rightharpoonup \mathcal{D}$.

Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist $\text{Hom}_{\mathcal{C}}: \mathbb{C} \rightharpoonup \mathbb{C}$ ein Profunktor. Für Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ induziert ein Funktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwei Profunktoren:

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F, \mathcal{D}): \mathcal{D} \rightharpoonup \mathbb{C} \quad (27.1)$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, F): \mathbb{C} \rightharpoonup \mathcal{D} \quad (27.2)$$

Zudem ist $\mathfrak{J} \circ F: \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}} = \mathbf{Fct}(\mathcal{D}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$, womit:

$$\mathfrak{J} \circ F: \mathbb{C} \rightharpoonup \mathcal{D}, (d, c) \mapsto (\mathfrak{J} \circ F)(c)(d) \quad (27.3)$$

ein Profunktor ist.

$$F \circ G(-, -) := \int^{d \in \mathcal{D}} F(d, -) \otimes G(-, d) \quad (27.4)$$

27.1 Graphen und Kographen

Definition 27.2 (Kograph eines Funktors). Für Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ und einen Funktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist (F) mit:

$$\text{Ob}(F) := \text{Ob } \mathbb{C} \sqcup \text{Ob } \mathcal{D} \quad (27.5)$$

$$\text{Hom}_{(F)}(X, Y) := \begin{cases} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y) & ; X, Y \in \text{Ob } \mathbb{C} \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) & ; X, Y \in \text{Ob } \mathcal{D} \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) & ; X \in \text{Ob } \mathbb{C}, Y \in \text{Ob } \mathcal{D} \\ \emptyset & ; X \in \text{Ob } \mathcal{D}, Y \in \text{Ob } \mathbb{C} \end{cases} \quad (27.6)$$

der Kograph von F .

Definition 27.3 (Kograph eines Profunktors). Für Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ und einen Profunktor $F: \mathbb{C} \rightharpoonup \mathcal{D}$ ist (F) mit:

$$\text{Ob}(F) := \text{Ob } \mathbb{C} \sqcup \text{Ob } \mathcal{D} \quad (27.7)$$

$$\text{Hom}_{(F)}(X, Y) := \begin{cases} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y) & ; X, Y \in \text{Ob } \mathbb{C} \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) & ; X, Y \in \text{Ob } \mathcal{D} \\ F(X, Y) & ; X \in \text{Ob } \mathcal{D}, Y \in \text{Ob } \mathbb{C} \\ \emptyset & ; X \in \text{Ob } \mathbb{C}, Y \in \text{Ob } \mathcal{D} \end{cases} \quad (27.8)$$

der Kograph von F .

Kapitel 28

$\dagger$ -Kategorien und -Funktor

Definition 28.1 ($\dagger$ -Kategorie). *Eine Kategorie $\mathcal{C}$, für die ein kontravarianter Endofunktor $\dagger: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ existiert, sodass:*

$$\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}: \dagger(X) = X \quad (28.1)$$

$$\dagger \circ \dagger = \text{id}_{\mathcal{C}} \quad (28.2)$$

wird $\dagger$ -Kategorie genannt.

Die Anwendung von $\dagger$ auf ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ bzw. einen Morphismus $f \in \text{Ar } \mathcal{C}$ wird auch als $X^\dagger := \dagger(X)$ bzw. $f^\dagger := \dagger(f)$ geschrieben.

Ein Morphismus $f \in \text{Ar } \mathcal{C}$, für den $f^\dagger = f$, wird *selbstadjungiert* genannt und ein Isomorphismus $f \in \text{Ar } \mathcal{C}$, für den $f^\dagger = f^{-1}$, wird *unitär* genannt. **DagCat** ist die *Kategorie der $\dagger$ -Kategorien*. Sie ist eine Unterkategorie von **Cat**. **Hilb** ist die *Kategorie der Hilberträume*, deren Objekte alle Hilberträume und deren Morphismen alle kurzen linearen Abbildungen sind. **Hilb_{fin}** ist die *Kategorie der endlichdimensionalen Hilberträume*, deren Objekte alle endlichdimensionalen Hilberträume und deren Morphismen alle kurzen linearen Abbildungen sind. Sie ist eine Unterkategorie von **Hilb**.

Definition 28.2 ($\dagger$ -Funktor).

Kapitel 29

C*-Kategorien

Satz 29.1. *Für jede C*-Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es einen treuen *-Funktork $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Hilb}$.*

Beweis.

□

Kapitel 30

Kernkategorien

Die Endomorphismen auf einem Monoid bilden wieder ein Monoid und die Automorphismen auf einer Gruppe bilden wieder eine Gruppe, was diese jeweils zu Abbildungen:

$$\text{End}: \text{Ob } \mathbf{Mag} \rightarrow \text{Ob } \mathbf{Mon} \quad (30.1)$$

$$\text{Aut}: \text{Ob } \mathbf{Mag} \rightarrow \text{Ob } \mathbf{Grp} \quad (30.2)$$

macht.

Definition 30.1 (Kernkategorie). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ wird die Unterkategorie $\mathbb{C} < \mathcal{C}$, die all ihre Objekte, jedoch nur die Isomorphismen enthält:*

$$\text{Ob } \mathbb{C} := \text{Ob } \mathcal{C} \quad (30.3)$$

$$\text{Ar } \mathbb{C} := \text{Iso } \mathcal{C} \quad (30.4)$$

die Kernkategorie genannt, notiert als $\mathbb{C}$.

Die Kernkategorie einer $\dagger$ -Kategorie enthält nur ihre unitären Isomorphismen.

Die Kernkategorie ist nötig, um aus End und Aut Funktoren zu konstruieren. Denn ein Endomorphismus oder Automorphismus lässt sich nur durch einen Isomorphismus auf ein anderes Magma übertragen. Für Magmen $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{Mag}$ induziert ein Magmenisomorphismus $f: X \rightarrow Y$ jeweils Isomorphismen:

$$\text{End}(f): \text{End}(X) \rightarrow \text{End}(Y), \xi \mapsto f \circ \xi \circ f^{-1} \quad (30.5)$$

$$\text{Aut}(f): \text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(Y), \xi \mapsto f \circ \xi \circ f^{-1}, \quad (30.6)$$

womit:

$$\text{End}: \mathbf{Mag} \rightarrow \mathbf{Mon} \quad (30.7)$$

$$\text{Aut}: \mathbf{Mag} \rightarrow \mathbf{Grp} \quad (30.8)$$

Der Kern wird damit zu einem Funktor:

$$: \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Grpd} \quad (30.9)$$

30.1 Homotopieinvariante Funktoren

Definition 30.2 (Homotopieinvarianter Funktor). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ wird ein Funktor $F: \mathbf{Top} \rightarrow \mathcal{C}$, für den $\forall X, Y \in \text{Ob } \mathbf{Top}$ und für alle homotopen Abbildungen $f, g \in \mathbf{Top}(X, Y)$ jeweils $Ff = Fg$ gilt, homotopieinvariant genannt.*

Beispiel 30.3. $\pi_1: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Grp}$ und $\pi_n: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$ sind homotopieinvariante Funktoren.

Seien $X, Y \in \text{Ob } \mathbf{Top}$ homotopieäquivalent mit Homotopieäquivalenzen $f \in \mathbf{Top}(X, Y)$ und $g \in \mathbf{Top}(Y, X)$, dann gilt mit einem homotopieinvarianten Funktor $F: \mathbf{Top} \rightarrow \mathcal{C}$:

$$Fg \circ Ff = F(g \circ f) = F \text{id}_X = \text{id}_{FX} \quad (30.10)$$

$$Ff \circ Fg = F(f \circ g) = F \text{id}_Y = \text{id}_{FY} \quad (30.11)$$

womit $FX \cong FY$ isomorph sind.

Dies gilt im Speziellen für π_1 und π_n .

Kapitel 31

????

Ein Objekt ohne Elemente wird *leer* genannt, wobei sich die Benennung von der leeren Menge als einzigem Objekt ohne Elemente in der Kategorie der Mengen ableitet. Im Gegensatz zur Kategorie der Mengen kann es jedoch in allgemeinen Kategorien passieren, dass mehrere (nicht zueinander isomorphe) Objekte oder sogar jedes Objekt leer ist.

31.1 Lawverescher Fixpunktsatz

Bei Abbildungen von einer Menge zu sich selbst können Elemente dieser Menge durch diese Abbildung auf sich selbst abgebildet werden, also Fixpunkte sein.

Definition 31.1 (Fixpunkt). *In einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit terminalem Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$, einem Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einem Endomorphismus $f: X \rightarrow X$ ist ein Element $x: 1 \rightarrow X$ mit $f(x) = x$ ein Fixpunkt von f .*

Definition 31.2 (Fixpunkteigenschaft). *In einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit terminalem Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ hat ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, für welches für jeden Endomorphismus $f: X \rightarrow X$ ein Element $x: 1 \rightarrow X$ mit $f(x) = x$ existiert, die Fixpunkteigenschaft.*

Korollar 31.3. *Terminale Objekte (mit einem Endomorphismus und einem Element) haben die Fixpunkteigenschaft.*

Beispiel 31.4. *In der Kategorie **Set** der Mengen hat eine Menge genau dann die Fixpunkteigenschaft, wenn sie einelementig ist. In der Kategorie **Top** der topologischen Räume haben die offenen Einheitskugeln nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz die Fixpunkteigenschaft.*

Beispiel 31.5. *Koprodukte von Objekten mit Fixpunkteigenschaft müssen nicht die Fixpunkteigenschaft haben. In der Kategorie **Set** der Mengen hat eine einelementige Menge $\{*\}$ nach Beispiel (31.4) die Fixpunkteigenschaft, aber $\{*\} + \{*\}$ hat diese nicht (etwa hat die Vertauschung beider Elemente keinen Fixpunkt). In der Kategorie **Top** der topologischen Räume hat eine offene Kugel D nach Beispiel (31.4) die Fixpunkteigenschaft, aber $D + D$ hat diese nicht (etwa hat die Vertauschung beider Kugeln keinen Fixpunkt).*

Da in der Kategorie **Set** der Mengen die Produkte von beliebigen Familien von einelementigen Mengen wieder einelementig sind und in der Kategorie **Top** der topologischen Räume die Produkte von endlichen Familien von Kugeln wieder Kugeln sind (mit $D^m \times D^n \cong D^{m+n}$), lässt sich vermuten, dass sich die Fixpunkteigenschaft unter bestimmten Bedingungen auf beliebige Produkte und stets auf endliche Produkte überträgt. Das

scheint bestärkt durch die Tatsache, dass die Elemente eines Produktes das Produkt der Elemente ist, also in einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit terminalem Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einer Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Objekten nach XXXX gilt:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, \prod_{i \in I} X_i) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, X_i) \quad (31.1)$$

Beispiel 31.6. *Produkte von Objekten mit Fixpunkteigenschaft müssen nicht die Fixpunkteigenschaft haben. XXXX*

Lemma 31.7. *Retrakte von Objekten mit Fixpunkteigenschaft haben die Fixpunkteigenschaft.*

Beweis. Sei $\mathbb{C}$ eine Kategorie mit terminalem Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ein Objekt mit Fixpunkteigenschaft und $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ein Retrakt mit Schnitt $s: A \hookrightarrow X$ und Retraktion $r: X \rightarrow A$, also sodass $rs = \text{id}_A$. Sei $f \in A \rightarrow A$, dann ist $sfr: X \rightarrow X$ und es existiert ein Element $x: 1 \rightarrow X$ mit $(sfr)(x) = x$. Durch Anwendung von r von links folgt $f(r(x)) = (fr)(x) = (rsfr)(x) = r(x)$, womit $r(x): 1 \rightarrow X$ ein Fixpunkt von f ist. $\square$

Satz 31.8 (Lawverescher Fixpunktsatz). *In einer Kategorie $\mathcal{C}$ hat ein Element $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, für welches ein Objekt $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und ein Morphismus $g: A \times A \rightarrow X$ mit:*

$$\forall_{h: A \rightarrow X} \exists_{a: 1 \rightarrow A} \forall_{a': 1 \rightarrow A} : g \circ (a, a') = h \circ a' \quad (31.2)$$

existiert, die Fixpunkteigenschaft.

Beweis. Sei $f: X \rightarrow X$ ein Endomorphismus, dann ist $h = f \circ g \circ \Delta_A: A \rightarrow X$, also gibt es ein Element $a: 1 \rightarrow A$, sodass $g \circ (a, a) = h \circ a$ gilt (also $a' = a$ gewählt wurde). Es folgt:

$$g \circ (a, a) = h \circ a = f \circ g \circ \Delta_A \circ a = f \circ g \circ (a, a), \quad (31.3)$$

womit $g \circ (a, a): 1 \rightarrow X$ ein Fixpunkt von f ist. $\square$

Lemma 31.9. *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$, ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ mit Endomorphismus $f: X \rightarrow X$, für welches das Fixobjekt $\text{Fix}(f) \in \text{Ob } \mathcal{C}$ existiert, ist für jedes Objekt $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$:*

$$\text{Fix Hom}_{\mathcal{C}}(A, f) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \text{Fix}(f)). \quad (31.4)$$

Beweis. XXXX $\square$

Hat $\mathbb{C}$ ein terminales Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$, dann folgt mit $A = 1$ insbesondere:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, \text{Fix}(f)) \cong \text{Fix Hom}_{\mathcal{C}}(1, f) \cong \{x \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, X) \mid f(x) = x\}, \quad (31.5)$$

also dass die Element des Fixobjektes von f bis auf Isomorphie genau die Fixpunkte von f sind.

Teil III

Kategorielle Verbindungen

Kapitel 32

Kategorienisomorphie und -äquivalenz

In der Topologie existieren mit der Homöomorphie und der Homotopieäquivalenz zwei verschiedene Begriffe, um topologische Räume zu vergleichen. Diese basieren auf den beiden verschiedenen Möglichkeiten, stetige Abbildungen mit gleichem Quell- und Bildraum zu vergleichen, dem direkten Vergleich und der Homotopieäquivalenz. In der Kategorientheorie gibt es ebenfalls zwei verschiedene Möglichkeiten, Funktoren mit gleicher Quell- und Bildkategorie zu vergleichen, dem direkten Vergleich und der natürlichen Isomorphie. Das führt auf entsprechenden Begriffe für Kategorien, welche jeweils der Homöomorphie und Homotopieäquivalenz für topologische Räume entsprechen.

Definition 32.1 (Kategorienisomorphie). *Zwei Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ für die zueinander inverse Funktoren $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ existieren:*

$$F \circ G =_{\mathcal{D}} \text{id}_{\mathcal{D}} \quad (32.1)$$

$$G \circ F =_{\mathbb{C}} \text{id}_{\mathbb{C}} \quad (32.2)$$

sind isomorph, notiert als $\mathbb{C} \cong \mathcal{D}$.

Analog, wie Homöomorphie für topologische Räume die Isomorphie in der Kategorie **Top** der topologischen Räume ist, ist Isomorphie für lokal kleine Kategorien die Isomorphie in der Kategorie **Cat** der lokal kleinen Kategorien. Definition (32.1) greift jedoch nicht auf lokal kleine Kategorien zurück.

Korollar 32.2. *Kategorienisomorphie ist eine Äquivalenzrelation.*

Definition 32.3 (Kategorienäquivalenz). *Zwei Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ für die zueinander quasiinverse Funktoren $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ existieren:*

$$F \circ G \cong_{\mathcal{D}} \text{id}_{\mathcal{D}} \quad (32.3)$$

$$G \circ F \cong_{\mathbb{C}} \text{id}_{\mathbb{C}} \quad (32.4)$$

sind äquivalent, notiert als $\mathbb{C} \simeq \mathcal{D}$.

Korollar 32.4. *Isomorphe Kategorien sind äquivalent.*

Korollar 32.5. *Kategorienäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.*

Kapitel 33

Morita-Äquivalenz

Lemma 33.1. *Für Ringe R und S ist:*

$${}_R\mathbf{Mod} \simeq {}_S\mathbf{Mod} \Leftrightarrow \mathbf{Mod}_R \simeq \mathbf{Mod}_S \quad (33.1)$$

Beweis. XXXX

□

Korollar 33.2. *Isomorphe Ringe sind morita-äquivalent.*

Lemma 33.3. *Kommutative und morita-äquivalente Ringe sind isomorph.*

Morita-Äquivalenz ist daher nur für nichtkommutative Ringe interessant, für kommutative stimmt sie mit der Isomorphie überein.

Beweis. XXXX

□

Lemma 33.4. *Jeder Ring R ist morita-äquivalent zu $\mathbf{Mat}_n(R)$ für $n > 0$.*

Beweis. XXXX

□

Kapitel 34

Isbell-Dualität

Für eine Kategorie $\mathcal{V}$ und eine $\mathcal{V}$ -angereicherte Kategorie $\mathcal{C}$.

$$[\mathbb{C}, \mathcal{V}]^{\text{op}}[\mathbb{C}^{\text{op}}, \mathcal{V}] \quad (34.1)$$

$$\mathcal{O}(X): c \mapsto [\mathbb{C}^{\text{op}}, \mathcal{V}](X, \mathcal{V}(-, c)) \quad (34.2)$$

$$\text{Spec}(Y): c \mapsto [\mathbb{C}, \mathcal{V}]^{\text{op}}(\mathcal{V}(c, -), Y) = [\mathbb{C}, \mathcal{V}](Y, \mathcal{V}(c, -)) \quad (34.3)$$

$$\begin{aligned} [\mathbb{C}, \mathcal{V}]^{\text{op}}(\mathcal{O}(F), G) &= \int_{c \in \mathbb{C}} \mathcal{V}(Gc, \mathcal{O}(F)c) = \int_{c \in \mathbb{C}} \mathcal{V}(Gc, [\mathbb{C}^{\text{op}}, \mathcal{V}](F, \mathcal{V}(-, c))) \\ &= \int_{c \in \mathbb{C}} \int_{d \in \mathbb{C}} \mathcal{V}(Gc, \mathcal{V}(Fd, \mathcal{V}(d, c))) \cong \int_{d \in \mathbb{C}} \int_{c \in \mathbb{C}} \mathcal{V}(Fd, \mathcal{V}(Gc, \mathcal{V}(d, c))) \\ &= \int_{d \in \mathbb{C}} \mathcal{V}(Fd, [\mathbb{C}, \mathcal{V}]^{\text{op}}(G, \mathcal{V}(d, -))) = \int_{d \in \mathbb{C}} \mathcal{V}(Fd, \text{Spec}(Y)d) \\ &= [\mathbb{C}^{\text{op}}, \mathcal{V}](F, \text{Spec}(G)) \end{aligned} \quad (34.4)$$

Lemma 34.1.

$$\text{Spec}(\mathcal{V}(c, -)) \cong \mathcal{V}(-, c) \quad (34.5)$$

Beweis.

$$\text{Spec}(\mathcal{V}(c, -))d = [\mathbb{C}, \mathcal{V}](\mathcal{V}(c, -), \mathcal{V}(d, -)) \cong \mathcal{V}(d, c) \quad (34.6)$$

□

$$\mathcal{O} \text{Spec}(\mathcal{V}(c, -))d \cong \mathcal{O}(\mathcal{V}(-, c))d = [\mathbb{C}^{\text{op}}, \mathcal{V}](\mathcal{V}(-, c), \mathcal{V}(-, d)) \cong \mathcal{V}(c, d) \quad (34.7)$$

Kapitel 35

Konkretisierbare Kategorie

Definition 35.1 (Konkrete Kategorie). *Eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein treuer Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ in eine Kategorie $\mathcal{D}$ bilden eine konkrete Kategorie $(\mathcal{C}, F)$ über $\mathcal{D}$.*

$\mathcal{D}$ wird in diesem Fall auch *Basiskategorie* genannt. Für $\mathcal{D} = \mathbf{Set}$ wird $(\mathcal{C}, F)$ auch einfach *konkrete Kategorie* genannt. Ist der Funktor klar, wird eine konkrete Kategorie auch einfach als $\mathcal{C}$ geschrieben, insbesondere wird $(\mathbf{Set}, \mathbf{Set})$ auch einfach konkrete Kategorie $\mathbf{Set}$ genannt.

Lemma 35.2. *Jede konkrete Kategorie ist lokal klein.*

Beweis. Sei $(\mathcal{C}, F)$ eine konkrete Kategorie, dann gibt es für Objekte $X, Y \in \text{Ob}\mathcal{C}$ eine Injektion $F_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(FX, FY)$. Da letzteres eine Menge ist, ist ersteres ebenfalls eine Menge. $\square$

Definition 35.3 (Konkretisierbare Kategorie). *Eine Kategorie $\mathcal{C}$, für die es für eine weitere Kategorie $\mathcal{D}$ eine konkrete Kategorie $(\mathcal{C}, F)$ über dieser gibt, wird konkretisierbar über $\mathcal{D}$ genannt.*

Für $\mathcal{D} = \mathbf{Set}$ wird $\mathcal{C}$ auch einfach *konkretisierbar* genannt.

Lemma 35.4. *Jede kleine Kategorie ist konkretisierbar.*

Beweis. XXXX $\square$

Die Lemmata XXXX und XXXX zeigen, dass konkret eine Eigenschaft zwischen klein und lokal klein ist.

Für eine konkretisierbare Kategorie $(\mathcal{C}, F)$ ist $(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{P} \circ F^{\text{op}})$ ebenfalls eine konkretisierbare Kategorie.

35.1 Freie Objekte

XXXX

Lemma 35.5. *Für eine Menge X gibt es einen $\mathbb{F}_2$ -Algebrenisomorphismus:*

$$\phi: (\mathcal{P}(X), \Delta, \emptyset, \cap, X) \xrightarrow{\cong} (X \otimes \mathbb{F}_2, +, 0, \cdot, 1), Y \mapsto \sum_{x \in X} \chi_Y(x)x \quad (35.1)$$

Beweis. Seien $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$, also $Y, Z \subseteq X$. ϕ erhält die Addition, da:

$$\phi(Y \Delta Z) = \sum_{x \in X} \chi_{Y \Delta Z}(x)x = \sum_{x \in X} (\chi_Y + \chi_Z)(x)x = \phi(Y) + \phi(Z). \quad (35.2)$$

ϕ erhält die Multiplikation, da:

$$\phi(Y \cap Z) = \sum_{x \in X} \chi_{Y \cap Z}(x)x = \sum_{x \in X} (\chi_Y \cdot \chi_Z)(x)x = \phi(Y) \cdot \phi(Z). \quad (35.3)$$

□

Für eine Menge X entspricht ein Untervektorraum von $X \otimes \mathbb{F}_2$ daher einem unter symmetrischer Differenz abgeschlossenen Mengensystem über X sowie eine Unteralgebra einem unter symmetrischer Differenz und Schnitt abgeschlossenem (schnittstabilen) Mengensystem über X .

Teil IV

Kategorielle Garbentheorie

Kapitel 36

Prägarben und Koprägarben

Definition 36.1 (Prägarbenkategorie). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist die Funktorkategorie:*

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbf{PSh}(\mathbb{C}) := \mathbf{Fct}(\mathbb{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}) = \mathbf{Set}^{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}} \quad (36.1)$$

ihre Prägarbenkategorie, deren Objekte, also Funktoren $F: \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, Prägarben auf $\mathbb{C}$ genannt werden.

Die Kategorien $\widehat{\mathbf{Set}}$, $\widehat{\mathbf{Grp}}$ und $\widehat{\mathbf{Top}}$ sind nun Beispiele für nicht lokal kleine Kategorien.

Für Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ und einen Funktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ gibt es einen induzierten Funktor $F: \widehat{\mathcal{D}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$.

Definition 36.2 (Konstante Prägarbe). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und eine Menge A ist:*

$$\underline{A}: \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Set}, X \mapsto A, f \mapsto \mathrm{id}_A \quad (36.2)$$

die konstante Prägarbe.

Der Potenzfunktorktor $\mathcal{P}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ ist kontravariant bzw. kovariant als $\mathcal{P}: \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ und damit eine Prägarbe auf $\mathbf{Set}$.

Für ein Objekt $X \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}$ sei:

$$\widehat{X} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \quad (36.3)$$

und dieser ist als Funktor $\mathbb{C}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ eine Prägarbe auf $\mathbb{C}$, also $\widehat{X} \in \mathrm{Ob} \widehat{\mathbb{C}}$.

Für Objekte $F, G \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}$ sind dementsprechend $\widehat{F}, \widehat{G}: \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ ebenso Funktoren. Für einen Morphismus $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F, G)$ sei:

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} = \mathrm{Ob} \mathcal{C}: \widehat{\eta}_X &:= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \eta) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\widehat{F}X, \widehat{G}X) \end{aligned} \quad (36.4)$$

und da für ein weiteres Objekt $Y \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} = \mathrm{Ob} \mathcal{C}$, für das dementsprechend $\widehat{\eta}_Y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\widehat{F}Y, \widehat{G}Y)$, und einen Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ für den:

$$\begin{aligned} \widehat{F}f &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, F) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, F)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\widehat{F}X, \widehat{F}Y) \end{aligned} \quad (36.5)$$

und dementsprechend $\widehat{G}f \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\widehat{G}X, \widehat{G}Y)$, gilt, dass:

$$\begin{aligned}\widehat{G}f \circ \widehat{\eta}_X &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, G) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \eta) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, \text{id}_G) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{id}_X, \eta) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{id}_X \circ f, \text{id}_G \circ \eta) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, \eta) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f \circ \text{id}_Y, \eta \circ \text{id}_F) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{id}_Y, \eta) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, \text{id}_F) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \eta) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, F) = \widehat{\eta}_Y \circ \widehat{F}f \quad (36.6)\end{aligned}$$

ist, also das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}\widehat{F}X & \xrightarrow{\widehat{\eta}_X} & \widehat{G}X \\ \widehat{F}f \downarrow & & \downarrow \widehat{G}f \\ \widehat{F}Y & \xrightarrow{\widehat{\eta}_Y} & \widehat{G}Y\end{array}$$

kommutiert, ist $\widehat{\eta}: \widehat{F} \Rightarrow \widehat{G}$ eine natürliche Transformation, also $\widehat{\eta} \in \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\widehat{F}, \widehat{G})$.

Lemma 36.3. *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:*

$$X \cong Y \Leftrightarrow \widehat{X} \cong \widehat{Y} \quad (36.7)$$

Beweis. □

Definition 36.4 (Darstellbare Prägarbe). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Prägarbe F , für die ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ mit:*

$$F \cong \widehat{X} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \quad (36.8)$$

existiert, darstellbar.

Beispiel 36.5. *Vergissfunktoren sind oft darstellbar:*

I.) $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ wird dargestellt durch $\mathbb{Z}$.

II.) $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Set}$ wird dargestellt durch $\mathbb{K}$.

III.) $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ wird dargestellt durch $\{*\}$.

Lemma 36.6. *Eine initiale Prägarbe ist nicht darstellbar.*

Beweis. XXXX □

Definition 36.7 (Koprägarbenkategorie). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist die Funktorkategorie:*

$$\widehat{\mathcal{C}^{\text{op}}} = \mathbf{PSh}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}) = \mathbf{Set}^{\mathcal{C}} \quad (36.9)$$

ihre Koprägarbenkategorie, deren Objekte, also Funktoren $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, Koprägarben auf $\mathcal{C}$ genannt werden.

Für ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist der kovariante Hom-Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \in \text{Ob } \widehat{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ eine Koprägarbe.

Lemma 36.8. *Für eine kleine Kategorie $\mathcal{C}$ ist $\widehat{\mathcal{C}}$ kartesisch abgeschlossen.*

Beweis. □

Lemma 36.9. *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ gibt es eine Kategorienäquivalenz:*

$$\widehat{\mathcal{C}/X} \simeq \widehat{\mathcal{C}}/\mathfrak{J}(X) \quad (36.10)$$

Beweis. □

$$\mathbf{PSh}\left(\int_{\mathcal{C}} \mathfrak{J}(X)\right) \simeq \widehat{\mathcal{C}}/\mathfrak{J}(X) \quad (36.11)$$

Lemma 36.10. *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:*

$$\widehat{\mathcal{C}/X} \simeq \widehat{\mathcal{C}}/\widehat{X}; \quad (36.12)$$

$$\widehat{X \setminus \mathcal{C}} \simeq \widehat{X} \setminus \widehat{\mathcal{C}}. \quad (36.13)$$

Beweis. XXXX □

Die Prägarbenkategorie einer punktierten Kategorie ist isomorph zur punktierten Prägarbenkategorie.

$$\mathbf{PSh}(\mathcal{C}_*) = \widehat{1 \setminus \mathcal{C}} \cong \widehat{1} \setminus \widehat{\mathcal{C}} = \mathbf{PSh}(\mathcal{C})_* \quad (36.14)$$

Lemma 36.11. *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ und eine Prägarbe $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ gibt es eine Kategorienäquivalenz:*

$$\mathbf{PSh}\left(\int_{\mathcal{C}} F\right) \simeq \widehat{\mathcal{C}}/F \quad (36.15)$$

Beweis. XXXX □

$$\widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{Cat}/\mathcal{C} \quad (36.16)$$

Seien $\text{Dis}, \text{Indis}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ das Hinzufügen der diskreten und indiskreten Topologie.

Korollar 36.12. *Für den Vergissfunktork $\mathfrak{F}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ gilt $\text{Dis} \dashv \mathfrak{F} \dashv \text{Indis}$.*

Seien $\text{Dis}, \text{Indis}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Cat}$ das Erzeugen der diskreten und indiskreten Kategorie.

Korollar 36.13. *Für den Objektfunktork $\text{Ob } \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}$ gilt $\text{Dis} \dashv \text{Ob} \dashv \text{Indis}$.*

Kapitel 37

Adjungierte Funktoren

„Adjoint Functors arise everywhere.“
– Saunders MacLane

Für lokal kleine Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ und kovariante Funktoren $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ und $G: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ sind jeweils:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F-, -): \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Set} \quad (37.1)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, G-): \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Set} \quad (37.2)$$

kovariante Funktoren mit selber Quell- und Bildkategorie.

Definition 37.1 (Adjungierte Funktoren). Für Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ werden Funktoren $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, für welche ein natürlicher Isomorphismus:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-, G-) \quad (37.3)$$

existiert, adjungiert genannt, notiert als:

$$\mathbb{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$$

Korollar 37.2. Für eine Adjunktion $L \dashv R$ ist $R^{\mathrm{op}} \dashv L^{\mathrm{op}}$.

Korollar 37.3. Für Adjunktionen $L_1 \dashv R_1$ und $L_2 \dashv R_2$ ist $L_1 L_2 \dashv R_2 R_1$.

Lemma 37.4. Adjungierte Funktoren $L: \mathbb{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: R$ mit $L \dashv R$ induzieren Adjunktionen:

$$\mathrm{Fct}(\mathcal{E}, \mathbb{C}) \xrightleftharpoons[L^*]{R^*} \mathrm{Fct}(\mathcal{E}, \mathcal{D})$$

$$\mathrm{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{E}) \xrightleftharpoons[R_*]{L_*} \mathrm{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$$

Beweis. Seien $\eta: \mathbb{C} \Rightarrow RL$ die Einheit und $\varepsilon: LR \Rightarrow \mathcal{D}$ die Koeinheit der Adjunktion. Diese induzieren natürliche Transformationen $\eta^*: \mathbb{C}^* =_{\mathrm{Fct}(\mathcal{E}, \mathbb{C})} (RL)^* = L^* R^*$ und $\varepsilon^*: (LR)^* = R^* L^* \Rightarrow_{\mathbb{C} = \mathrm{Fct}(\mathcal{E}, \mathbb{C})}^* \mathbb{C}$, womit $R^* \dashv L^*$, sowie $\eta_*: (\mathbb{C})_* =_{\mathrm{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{E})} (RL)_* = R_* L_*$ und $\varepsilon_*: (LR)_* = L_* R_* \Rightarrow (\mathbb{C})_* =_{\mathrm{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{E})}$, womit $L_* \dashv R_*$. $\square$

Sei $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(LX, LX) \rightarrow \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, RLX)$ und $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(RY, RY) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(LRY, Y)$

$$\eta: \mathbb{C} \Rightarrow RL, \eta_X := \widetilde{\text{id}}_{LX} \quad (37.4)$$

$$\varepsilon: LR \Rightarrow_{\mathcal{D}} RY, \varepsilon_Y := \widetilde{\text{id}}_{RY} \quad (37.5)$$

$$L: L \xrightarrow{L_*\eta} LRL \xrightarrow{L^*\varepsilon} L \quad (37.6)$$

$$R: R \xrightarrow{R^*\eta} RLR \xrightarrow{R_*\varepsilon} R \quad (37.7)$$

$$(L_*\eta \circ L^*\varepsilon)_X = (L_*\eta)_X \circ (L^*\varepsilon)_X = L\eta_X \circ \varepsilon_{LX} \quad (37.8)$$

$$(R^*\eta \circ R_*\varepsilon)_X = (R^*\eta)_X \circ (R_*\varepsilon)_X = \eta_{RX} \circ R\varepsilon_X \quad (37.9)$$

37.1 Einheiten und Koeinheiten

Satz 37.5. Für adjungierte Funktoren $L: \mathbb{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: R$ mit $L \dashv R$ ist:

- I.) L genau dann volltreu, wenn die Einheit $\eta: \mathbb{C} \Rightarrow RL$ ein natürlicher Isomorphismus ist. Insbesondere folgt aus letzterem direkt, dass R essentiell surjektiv ist.
- II.) R genau dann volltreu, wenn die Koeinheit $\varepsilon: LR \Rightarrow_{\mathcal{D}} RY$ ein natürlicher Isomorphismus ist. Insbesondere folgt aus letzterem direkt, dass L essentiell surjektiv ist.

Beweis. I.) $\Rightarrow$: XXXX $\Leftarrow$: Seien $X, X' \in \text{Ob } \mathcal{C}$, dann ist $\eta_X: X \rightarrow RLX$ ein Isomorphismus. Durch Nachkomposition mit η_X^{-1} ergibt sich der hintere Isomorphismus in:

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(LX', LX) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X', RLX) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X), \quad (37.10)$$

womit L volltreu ist.

II.) $\Rightarrow$: XXXX $\Leftarrow$: Seien $Y, Y' \in \text{Ob } \mathcal{D}$, dann ist $\varepsilon_Y: LRY \rightarrow Y$ ein Isomorphismus. Durch Vorkomposition mit ε_Y^{-1} ergibt sich der hintere Isomorphismus in:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(RY, RY') \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(LRY, Y') \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y'), \quad (37.11)$$

womit R volltreu ist. □

Lemma 37.6. Für adjungierte Funktoren $L: \mathbb{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: R$ mit $L \dashv R$ gilt:

- I.) Ist L volltreu und R konservativ, dann ist L essentiell surjektiv und R volltreu.
- II.) Ist R volltreu und L konservativ, dann ist R essentiell surjektiv und L volltreu.

Beweis. I.) Sei $d \in \text{Ob } \mathcal{D}$, dann ist $\text{id}_{Rd}: Rd \xrightarrow{\eta_{Rd}} RLRd \xrightarrow{R\varepsilon_d} Rd$. Da L volltreu ist, ist η_{Rd} nach Satz (37.5) I.) ein Isomorphismus. Aus der 2-aus-3-Eigenschaft von Isomorphismen nach Lemma (3.3) folgt, dass $R\varepsilon_d$ ein Isomorphismus ist. Da R konservativ ist, ist ε_d ein Isomorphismus, womit die Behauptungen aus Satz (37.5) II.) folgen.

II.) Sei $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$, dann ist $\text{id}_{Lc}: Lc \xrightarrow{L\eta_c} LRLc \xrightarrow{\varepsilon_{Lc}} Lc$. Da R volltreu ist, ist ε_{Lc} nach Satz (37.5) II.) ein Isomorphismus. Aus der 2-aus-3-Eigenschaft von Isomorphismen nach Lemma (3.3) folgt, dass $L\eta_c$ ein Isomorphismus ist. Da L konservativ ist, ist η_c ein Isomorphismus, womit die Behauptungen aus Satz (37.5) I.) folgen. □

37.2 Generelles Adjungierte-Funktoren-Theorem (GAFT)

XXXX

37.3 Spezielles Adjungierte-Funktoren-Theorem (SAFT)

XXXX

37.4 Adjunktionen auf Scheibenkategorien

XXXX

37.5 Spezielle adjungierte Funktoren

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ können als mit durch die partiellen Ordnung induzierten Kategorien betrachtet werden, wobei es einen kanonischen Inklusionsfunktorktor $I: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ gibt. Dieser hat einen linksadjungierten Funktor $\lceil - \rceil: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben durch Aufrunden und einen rechtsadjungierten Funktor $\lfloor - \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben durch Abrunden. Für $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{R} \ni x \leq I(n) \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leq n \in \mathbb{Z} \quad (37.12)$$

$$\mathbb{R} \ni I(n) \leq x \Leftrightarrow n \leq \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \quad (37.13)$$

Kapitel 38

Reflektoren und Koreflektoren

In der Mathematik gibt es zahlreiche Hierarchien von Strukturen durch die Weg- oder Zunahme von definierenden Eigenschaften. Bekannte Beispiele sind die der algebraischen Strukturen von Magmen bis Körpern in der Algebra und die topologischen Trennungseigenschaften von Kolmogoroff-Räumen (T_0 -Räumen) zu vollständig normalen Hausdorff-Räumen (T_5 -Räumen) in der Topologie. Diese Hierarchien übertragen sich als kanonische Inklusionen (oder Vergissfunktoren) jeweils auf ihre entsprechenden Kategorien, was einem Abstieg in der Hierarchie entspricht. Links- und rechtsadjungierte Funktoren dazu entsprechen daher einem Aufstieg in der Hierarchie, also einer kanonischen Möglichkeit einer allgemeineren Struktur eine speziellere Struktur zuzuordnen. Aufgrund dieser bemerkenswerten Eigenschaft sind solche Funktoren überall in der Mathematik aufzufinden.

38.1 Reflektoren

Definition 38.1 (Reflektive Unterkategorie). *Für eine Kategorie $\mathcal{D}$ wird eine Unterkategorie $\mathcal{C}$, für welche die Einbettung $I: \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ ein linksadjungierten Funktor $L \dashv I$, den Reflektor, hat:*

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{I} \\ \xleftarrow{L} \end{array} \mathcal{D}$$

reflektiv genannt.

Beispiel 38.2. *Beispiele für reflektive Unterkategorien aus der Algebra sind:*

- **AbGrp** ist eine reflektive Unterkategorie von **AbHGrp**.
Der Reflektor ist die Grothendieck-Gruppe $\mathcal{G}: \mathbf{AbHGrp} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$.
- **AbGrp** ist eine reflektive Unterkategorie von **Grp**.
Der Reflektor ist die Abelisierung $\cdot^{\text{ab}}: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$.
- **Grp** ist eine reflektive Unterkategorie von **Mon**.
Der Reflektor ist die Einheitengruppe $\cdot^\times: \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Grp}$.

Beispiel 38.3. *Beispiele für reflektive Unterkategorien aus der Topologie sind:*

- **Top₀** ist eine reflektive Unterkategorie von **Top**.
Der Reflektor ist der Kolmogoroff-Quotient $\text{KQ}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}_0$.
- **Haus** ist eine reflektive Unterkategorie von **Top**.
Der Reflektor ist der Hausdorff-Quotient $\text{HQ}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Haus}$.

- **cHaus** ist eine reflektive Unterkategorie von **Top**.
Der Reflektor ist die Stone–Čech-Kompaktifizierung $\beta: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{cHaus}$.
- **cHausGrp** ist eine reflektive Unterkategorie von **TopGrp**.
Der Reflektor ist die Bohr-Kompaktifizierung $\text{Bohr}: \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{cHausGrp}$.

Lemma 38.4. *Volle und reflektive Unterkategorien von kovollständigen Kategorien sind kovollständig.*

Beweis. XXXX □

Lemma 38.5. *Für eine Kategorie $\mathcal{D}$ und eine reflektive Unterkategorie $\mathcal{C}$ gilt für die jeweils in ihnen gebildeten Limiten und Kolimiten:*

$$\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{C}}Y_i \cong \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{D}}Y_i \quad (38.1)$$

$$\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{C}}X_i \cong L \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{D}}X_i. \quad (38.2)$$

Beweis. Sei $X \in \text{Ob } \mathcal{D}$, dann ist:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{C}}Y_i) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(LX, \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{C}}Y_i) \cong \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(LX, Y_i) \\ &\cong \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y_i) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{D}}Y_i), \end{aligned} \quad (38.3)$$

womit die Aussage aus der Volltreueheit der Yoneda-Einbettung folgt.

Sei $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, dann ist:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{C}}X_i, Y) &\cong \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y) \cong \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_i, Y) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{D}}X_i, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{D}}X_i, Y), \end{aligned} \quad (38.4)$$

womit die Aussage aus der Volltreueheit der Yoneda-Einbettung folgt. □

38.2 Koreflektoren

Definition 38.6 (Koreflektive Unterkategorie). *Für eine Kategorie $\mathcal{D}$ wird eine Unterkategorie $\mathcal{C}$, für welche die Einbettung $I: \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ ein rechtsadjungierten Funktor $I \dashv R$, den Koreflektor, hat:*

$$\mathcal{D} \begin{array}{c} \xrightarrow{R} \\ \xleftarrow{I} \end{array} \mathcal{C}$$

koreflektiv genannt.

Lemma 38.7. *Volle und koreflektive Unterkategorien von vollständigen Kategorien sind vollständig.*

Beweis. XXXX □

Lemma 38.8. *Für eine Kategorie $\mathcal{D}$ und eine koreflektive Unterkategorie $\mathcal{C}$ gilt für die jeweils in ihnen gebildeten Limiten und Kolimiten:*

$$\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{C}}Y_i \cong R\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{D}}Y_i \quad (38.5)$$

$$\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{C}}X_i \cong \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{D}}X_i. \quad (38.6)$$

Beweis. Sei $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, dann ist:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{C}}Y_i) &\cong \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_i) \cong \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y_i) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{D}}Y_i) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{D}}Y_i), \end{aligned} \quad (38.7)$$

womit die Aussage aus der Volltreueheit der Yoneda-Einbettung folgt.

Sei $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, dann ist:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{C}}X_i, Y) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{C}}X_i, RY) \cong \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{C}}\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, RY) \\ &\cong \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{C}}\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_i, Y) \cong \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{C}}\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} {}^{\mathcal{D}}X_i, Y), \end{aligned} \quad (38.8)$$

womit die Aussage aus der Volltreueheit der Yoneda-Einbettung folgt. $\square$

Kapitel 39

Kan-Erweiterungen und -Lifte

Kan-Erweiterungen und -Lifte gehören zu den wichtigsten Konzepten der Kategorientheorie aufgrund ihrer Verallgemeinerung anderer Konzepte. Besonders kurios ist, dass Limiten und Kolimiten beide Spezialfälle von Kan-Erweiterungen sind, aber diese umgekehrt ebenso Spezialfälle von Limiten und Kolimiten.

Seien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Für eine weitere Kategorie $\mathcal{E}$ gibt es durch Vor- und Nachkomposition mit F jeweils induzierte Funktoren:

$$F^*: \text{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{E}), G \mapsto G \circ F \quad (39.1)$$

$$F_*: \text{Fct}(\mathcal{E}, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Fct}(\mathcal{E}, \mathcal{D}), H \mapsto F \circ H \quad (39.2)$$

(XXXX: Verifizierung der Funktoreigenschaften hinzufügen.)

39.1 Kan-Erweiterungen

Gibt es einen links- und rechtsadjungierten Funktor zu F^* , jeweils notiert als:

$$\text{Lan}_F, \text{Ran}_F: \text{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E}), \quad (39.3)$$

also mit $\text{Lan}_F \dashv F^* \dashv \text{Ran}_F$, dann werden für einen Funktor $G \in \text{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{E})$ die Funktoren $\text{Lan}_F(G), \text{Ran}_F(G) \in \text{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ jeweils (globale) *linke* und *rechte Kan-Erweiterung* von G entlang F genannt. Das folgende Diagramm veranschaulicht lediglich die Funktoren und kommutiert nicht unbedingt:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C} & \\ F \swarrow & & \searrow G \\ \mathcal{D} & \xrightarrow[\text{Ran}_F(G)]{\text{Lan}_F(G)} & \mathcal{E} \end{array}$$

Kan-Erweiterungen haben also die gleiche Zielkategorie wie die Funktoren, welche sie erweitern.

39.2 Kan-Lifte

Gibt es einen links- und rechtsadjungierten Funktor zu F_* , jeweils notiert als:

$$\text{Lift}_F, \text{Rift}_F: \text{Fct}(\mathcal{E}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{Fct}(\mathcal{E}, \mathbb{C}), \quad (39.4)$$

also mit $\text{Lift}_F \dashv F_* \dashv \text{Rift}_F$, dann werden für einen Funktor $H \in \text{Fct}(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ die Funktoren $\text{Lift}_F(H), \text{Rift}_F(H) \in \text{Fct}(\mathcal{E}, \mathbb{C})$ jeweils (globaler) *linker* und *rechter Kan-Lift* von H entlang F genannt. Das folgende Diagramm veranschaulicht lediglich die Funktoren und kommutiert nicht unbedingt:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D} & \\ F \nearrow & & \nwarrow H \\ \mathbb{C} & \xleftarrow[\text{Rift}_F(H)]{\text{Lift}_F(H)} & \mathcal{E} \end{array}$$

Kan-Lifte haben also die gleiche Quellkategorie wie die Funktoren, welche sie liften.

Für ein Diagramm der Form:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D} & \\ F \nearrow & & \searrow G \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{H} & \mathcal{E} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\text{Lan}_F H, G) &\cong \text{Hom}(H, F^*G) = \text{Hom}(H, G \circ F) \\ &= \text{Hom}(H, G_*F) \cong \text{Hom}(\text{Lift}_G H, F) \end{aligned} \quad (39.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Hom}(G, \text{Ran}_F H) &\cong \text{Hom}(F^*G, H) = \text{Hom}(G \circ F, H) \\ &= \text{Hom}(G_*F, H) \cong \text{Hom}(F, \text{Rift}_G H) \end{aligned} \quad (39.6)$$

Für die terminale Kategorie $\mathcal{T}$ und den eindeutigen Funktor $!: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{T}$ ist

$$\lim G = \text{Ran}_! G \in \text{Fct}(\mathcal{T}, \mathcal{E}) \quad (39.7)$$

$$G = \text{Lan}_! G \in \text{Fct}(\mathcal{T}, \mathcal{E}) \quad (39.8)$$

Kan-Erweiterungen sind spezielle Limiten:

Lemma 39.1. *Für Kategorien $\mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ sowie Funktoren $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{E}$ ist:*

$$\text{Lan}_F(G)(Y) \cong \varinjlim_{FX \rightarrow Y} GX \quad (39.9)$$

$$\text{Ran}_F(G)(Y) \cong \varprojlim_{Y \leftarrow FX} GX \quad (39.10)$$

Beweis. □

Kan-Erweiterungen lassen sich benutzen, um adjungierte Funktoren zu konstruieren:

Lemma 39.2. *Für Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$, einen volltreuen Funktor $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ist:*

$$\text{Lan}_F(\mathcal{D}) \dashv F \dashv \text{Ran}_F(\mathcal{D}) \quad (39.11)$$

Beweis. Mit Lemma (39.1) ist:

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, \mathrm{Ran}_F(\mathbb{C})(Y)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, \varprojlim_{Y \leftarrow FX} X) \cong \varprojlim_{Y \leftarrow FX} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, X) \\
 &\cong \varprojlim_{Y \leftarrow FX} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FZ, FX) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FZ, \varprojlim_{Y \leftarrow FX} FX) \\
 &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FZ, Y)
 \end{aligned} \tag{39.12}$$

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathrm{Lan}_F(\mathcal{D})(Y), Z) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\varinjlim_{FX \rightarrow Y} X, Z) \cong \varinjlim_{FX \rightarrow Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Z) \\
 &\cong \varinjlim_{FX \rightarrow Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, FZ) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim_{FX \rightarrow Y} FX, FZ) \\
 &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, FZ)
 \end{aligned} \tag{39.13}$$

□

39.3 Yoneda-Erweiterung

Definition 39.3 (Yoneda-Erweiterung). Für Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ sowie einen Funktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist dessen linke Kan-Erweiterung (sofern existent) entlang der Yoneda-Einbettung $\mathfrak{y}_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$:

$$\mathrm{Lan}_{\mathfrak{y}_{\mathbb{C}}}(F): \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{D} \tag{39.14}$$

dessen Yoneda-Erweiterung.

Die Yoneda-Einbettung der Komposition $\mathfrak{y}_{\mathcal{D}} \circ F$ mit der Yoneda-Einbettung $\mathfrak{y}_{\mathcal{D}}: \mathcal{D} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}$ ergibt einen Funktor $\mathrm{Lan}_{\mathfrak{y}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{y}_{\mathcal{D}} \circ F): \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}$ zwischen ihren Prägarbenkategorien.

Für Prägarben $F \in \mathrm{Ob} \widehat{\mathbb{C}}$ und $G \in \mathrm{Ob} \widehat{\mathcal{D}}$ ist:

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{D}}}(\mathrm{Lan}_{\mathfrak{y}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{y}_{\mathcal{D}} \circ F)G, H) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{D}}}((\mathfrak{y}_{\mathcal{D}} \circ F)G, \mathfrak{y}_{\mathbb{C}}^* H) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{C}}}(G, H \circ F) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{C}}}(G, F^* H) \tag{39.15}$$

Kapitel 40

Kategorie der Garben und Prägarben

40.1 Ouvert-Kategorie und -Funktork

Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ bezeichnet $\mathbf{Ouv}(X)$ die dünne Kategorie, deren Objekte die offenen Mengen der Topologie sind und für die es für jede Inklusion $U \subseteq V$ offener Mengen jeweils einen Morphismus $U \rightarrow V$ gibt:

$$\mathrm{Ob} \, \mathbf{Ouv}(X) := \mathcal{O}_X \quad (40.1)$$

$$\mathbf{Ouv}(X)(U, V) := \begin{cases} \{*\} & ; U \subseteq V \\ \emptyset & ; U \not\subseteq V \end{cases} \quad (40.2)$$

Beispiel 40.1. Die Ouvert-Kategorie des einpunktigen Raumes ist die terminale Kategorie:

$$\mathbf{Ouv}(\{*\}) = \mathcal{T}. \quad (40.3)$$

Lemma 40.2. Die Ouvert-Kategorie ist ein kovarianter Funktor:

$$\mathbf{Ouv}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Cat}. \quad (40.4)$$

Beweis. XXXX □

Definition 40.3 (Garbe). Für einen topologischen Raum X und $\mathbb{C} = \mathbf{Set}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Ab}$ oder $\mathbf{CRing}$ ist ein kontravarianter Funktor $F: \mathbf{Ouv}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ eine Prägarbe auf X .

Definition 40.4 (B-Garbe). Für einen topologischen Raum X mit einer Basis $(B_i)_{i \in I}$ und der vollen Unterkategorie $\mathcal{O}$ von $\mathbf{Ouv}(X)$ mit diesen als Objekten ist ein kovarianter Funktor $F: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$

Für einen topologischen Raum X bezeichnet $\mathbf{PSh}_{\mathbb{C}}(X)$ die Kategorie der Prägarben auf X mit Werten in einer lokal kleinen Kategorie $\mathbb{C}$, wobei die Prägarbenmorphis men

$$\mathbf{PSh}_{\mathbb{C}}(X) := \mathbf{Fct}(\mathbf{Ouv}(X), \mathbb{C}) \quad (40.5)$$

$\mathbf{Sh}_{\mathbb{C}}(X)$ bezeichnet die Kategorie der Garben auf X mit Werten in $\mathbb{C}$, welche eine volle Unterkategorie von $\mathbf{PSh}_{\mathbb{C}}(X)$ ist. $\mathbf{Qcoh}_{\mathbb{C}}(X)$ und $\mathbf{Coh}_{\mathbb{C}}(X)$ bezeichnen dementsprechend die Kategorie der quasikohärenten Prägarben und Kategorie der kohärenten Garben auf X mit Werten in $\mathbb{C}$.

Kapitel 41

Pfeilkategorie

Hat $\mathbb{C}$ ein initiales Objekt $0 \in \text{Ob } \mathbb{C}$ bzw. ein terminales Objekt $1 \in \text{Ob } \mathbb{C}$, dann hat $\mathbb{C}^\rightarrow$ ein initiales Objekt id_0 bzw. ein terminales Objekt id_1 . Die Umkehrung gilt nicht unbedingt.

Es gibt einen Funktor $\text{id}_-: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\rightarrow$. Hat $\mathbb{C}$ ein initiales Objekt $0 \in \text{Ob } \mathbb{C}$, dann gibt es einen Funktor $0 \rightarrow -: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\rightarrow$ und hat $\mathbb{C}$ ein initiales Objekt $0 \in \text{Ob } \mathbb{C}$, dann gibt es einen Funktor $- \rightarrow 1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\rightarrow$. Alle diese Funktoren sind volltreu, da jeder Morphismus $f: X \rightarrow Y$ die folgenden Diagramm kommutieren lässt:

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, RY) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, RZ) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(LA, X) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(LA, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(LA, Z) \end{array}$$

Die Domäne und Kodomäne sind Funktoren $\text{dom}: \mathbb{C}^\rightarrow \rightarrow \mathbb{C}, F \mapsto F(0)$ und $\text{cod}: \mathbb{C}^\rightarrow \rightarrow \mathbb{C}, F \mapsto F(1)$.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow ! \\ B & \xrightarrow{!} & 1 \end{array}$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}^\rightarrow}(f: A \rightarrow B, X \xrightarrow{!} 1) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{dom}(f), X) \quad (41.1)$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}^\rightarrow}(0 \xrightarrow{!} B, g: X \rightarrow Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, \text{cod}(g)) \quad (41.2)$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}^\rightarrow}(\text{id}_A, g: X \rightarrow Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \text{dom}(g)) \quad (41.3)$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}^\rightarrow}(f: A \rightarrow B, \text{id}_X) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{cod}(f), X) \quad (41.4)$$

$$(0 \xrightarrow{!} -) \dashv \text{cod} \dashv \text{id}_- \dashv \text{dom} \dashv (- \xrightarrow{!} 1) \quad (41.5)$$

Teil V

Yoneda-Lemma

Kapitel 42

Yoneda-Einbettung

Das Yoneda-Lemma ist die wichtigste und zentralste Erkenntnis der Kategorientheorie, da es die Grundlage zahlreicher kategorientheoretischer Beweise ist.

Für einen Morphismus $f: X \rightarrow Y$ gibt es natürliche Transformationen:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, -): \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \quad (42.1)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, f): \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) \quad (42.2)$$

Ist f ein Monomorphismus, dann ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, f)$ nach Korollar (3.9) eine Familie an Injektionen. Ist f ein Epimorphismus, dann ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, -)$ nach Korollar (3.17) ebenso eine Familie an Injektionen.

Definition 42.1 (Yoneda-Einbettung). *Der Funktor:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y} : \mathcal{C} &\rightarrow \widehat{\mathcal{C}} = \mathrm{Fct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}), \\ X &\mapsto \widehat{X} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), \\ f &\mapsto \widehat{f} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, f) \text{ mit } \widehat{f}_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f) \end{aligned} \quad (42.3)$$

der eine Kategorie $\mathcal{C}$ in ihre Prägarbenkategorie $\widehat{\mathcal{C}}$ einbettet ist die Yoneda-Einbettung.

Die Yoneda-Einbettung ist tatsächlich ein Funktor.

Beweis.

$$\mathfrak{Y}(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{\mathfrak{Y}(Y)} \quad (42.4)$$

$$\mathfrak{Y}(f \circ g) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f \circ g) = \mathfrak{Y}(f) \circ \mathfrak{Y}(g) \quad (42.5)$$

□

Satz 42.2. *Die Yoneda-Einbettung erhält Limiten.*

Die Yoneda-Einbettung erhält jedoch kaum Kolimiten.

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}\left(\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} X_i\right)(A) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(-, \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} X_i\right)(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(A, \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} X_i\right) \cong \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X_i) \\ &= \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_i)(A) = \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \mathfrak{Y}(X_i)(A) \end{aligned} \quad (42.6)$$

□

Satz 42.3. *Die Yoneda-Einbettung ist dicht.*

Beweis.

□

42.1 Satz von Yoneda

$$h_A := \text{Hom}(A, -) \quad (42.7)$$

$$h^B := \text{Hom}(-, B) \quad (42.8)$$

Lemma 42.4 (Yoneda-Lemma, kovariant). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$, ein Objekt $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einen kovarianten Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ ist:*

$$\text{Nat}(h_A, F) \cong FA \quad (42.9)$$

Beweis. XXXX □

Insbesondere ist:

$$\text{Nat}(h_A, h_B) \cong h_B A = \text{Hom}(B, A) \quad (42.10)$$

$$\text{Nat}(h_0, F) \cong F0 \quad (42.11)$$

$$\text{Nat}(h_1, F) \cong F1 \quad (42.12)$$

Lemma 42.5 (Yoneda-Lemma, kontravariant). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$, ein Objekt $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einen kontravarianten Funktor $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ ist:*

$$\text{Nat}(h^A, G) \cong GA \quad (42.13)$$

Beweis. XXXX □

Insbesondere ist:

$$\text{Nat}(h^A, h^B) \cong h^B A = \text{Hom}(A, B) \quad (42.14)$$

$$\text{Nat}(h^0, G) \cong G0 \quad (42.15)$$

$$\text{Nat}(h^1, G) \cong G1 \quad (42.16)$$

Satz 42.6 (Satz von Yoneda). *Die Yoneda-Einbettung ist volltreu.*

Beweis. □

Lemma 42.7 (Yoneda-Prinzip). *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ gilt:*

$$X \cong Y \Leftrightarrow \mathfrak{Y}(X) \cong \mathfrak{Y}(Y) \quad (42.17)$$

Beweis. $\Rightarrow$: Folgt aus Lemma (21.5). $\Leftarrow$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) = \mathfrak{Y}(X)(X) \cong \mathfrak{Y}(Y)(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \quad (42.18)$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y) = \mathfrak{Y}(Y)(Y) \cong \mathfrak{Y}(X)(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \quad (42.19)$$

□

42.2 Total (distributive) Kategorien

Definition 42.8 (Totale Kategorie). *Eine Kategorie $\mathcal{C}$, deren Yoneda-Einbettung $\mathfrak{y} : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ einen linksadjungierten Funktor $L_1 : \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ besitzt, wird total genannt.*

Eine Kategorie $\mathcal{C}$, für die $\mathcal{C}^{\text{op}}$ total ist, wird *kototal* genannt.

Beispiel 42.9. *Set ist total und kototal.*

Definition 42.10 (Total distributive Kategorie). *Eine totale Kategorie $\mathcal{C}$, deren zur Yoneda-Einbettung linksadjungierter Funktor $L_1 : \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ einen linksadjungierten Funktor $L_2 : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\widehat{\mathcal{C}}}$ besitzt, wird total distributiv genannt.*

Eine Kategorie $\mathcal{C}$, für die $\mathcal{C}^{\text{op}}$ total distributiv ist, wird *kototal distributiv* genannt.

Lemma 42.11. *Jede total distributive Kategorie ist kototal.*

Beweis. XXXX

□

Lemma 42.12. *Für eine kleine Kategorie $\mathcal{C}$ ist $\widehat{\mathcal{C}}$ total distributiv.*

Beweis. XXXX

□

Kapitel 43

Exakte und koexakte Sequenzen

Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit Nullobjekt $\Omega \in \text{Ob } \mathcal{C}$ wird eine Sequenz $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}$:

I.) *exakt* genannt, wenn:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Z) \quad (43.1)$$

für jedes Objekt $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ als Sequenz punktierter Mengen (wobei die Punktierung durch die Nullmorphisamen gegeben ist) exakt ist.

II.) *koexakt* genannt, wenn:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, A) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \quad (43.2)$$

für jedes Objekt $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ als Sequenz punktierter Mengen (wobei die Punktierung durch die Nullmorphisamen gegeben ist) exakt ist.

Lemma 43.1. Für adjungierte Funktoren $L: \mathcal{C} \rightleftharpoons \mathcal{D}: R$ mit $L \dashv R$ und:

I.) eine exakte Sequenz $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{D}$ ist $RX \xrightarrow{Rf} RY \xrightarrow{Rg} RZ$ exakt in $\mathcal{C}$.

II.) eine koexakte Sequenz $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}$ ist $LX \xrightarrow{Lf} LY \xrightarrow{Lg} LZ$ koexakt in $\mathcal{D}$.

Beweis. I.): Sei A ein punktierter topologischer Raum, dann gibt es ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, RX) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, RY) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, RZ) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(LA, X) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(LA, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(LA, Z) \end{array}$$

Da die untere horizontale Zeile exakt ist, ist es ebenso die obere. II.): Analog. $\square$

Korollar 43.2. Für eine exakte Sequenz $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ in $\text{Ho}(\mathbf{Top}_*)$ ist die Sequenz $\Omega(X, x_0) \xrightarrow{\Omega f} \Omega(Y, y_0) \xrightarrow{\Omega g} \Omega(Z, z_0)$ ebenfalls exakt.

Korollar 43.3. Für eine koexakte Sequenz $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ in $\text{Ho}(\mathbf{Top}_*)$ ist die Sequenz $\Sigma(X, x_0) \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma(Y, y_0) \xrightarrow{\Sigma g} \Sigma(Z, z_0)$ ebenfalls koexakt.

Teil VI

Kategorien mit zusätzlicher Struktur

Kapitel 44

Kartesisch abgeschlossene Kategorien

Definition 44.1 (Kartesisch abgeschlossene Kategorie).

Lemma 44.2. *Set und Cat sind kartesisch abgeschlossen.*

Beweis.

□

Kapitel 45

(Prä)additive und abelsche Kategorien

Sei $\mathbb{C}$ eine Kategorie, für die $\forall X, Y \in \text{Ob } \mathbb{C}$ jeweils $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)$ die Struktur einer abelschen Gruppe $(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y), +, 0)$ besitzt.

Definition 45.1 (Präadditive Kategorie). *Ist die Komposition von Morphismen in $\mathbb{C}$ biadditiv, also für Objekte $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathbb{C}$ gilt $\forall f, f_1, f_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y) \forall g, g_1, g_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(Y, Z)$:*

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2 \quad (45.1)$$

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f, \quad (45.2)$$

dann wird $\mathbb{C}$ präadditiv genannt.

In präadditiven Kategorien ist $\text{Hom}_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^{\text{op}} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

$\mathbf{Vect}$ ist eine präadditive Kategorie.

Definition 45.2 (Additiver Funktor). *Für präadditive Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ wird ein Funktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$, für den $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY), f \mapsto Ff$ für alle Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathbb{C}$ ein Gruppenhomomorphismus ist, additiv genannt.*

Lemma 45.3. *Für einen Ring R und ein R -Linksmodul M sind die Funktoren:*

$$\mathbf{Mod}_R(-, M), \mathbf{Mod}_R(M, -): \mathbf{Mod}_R^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab} \quad (45.3)$$

additiv.

Beweis. XXXX □

Lemma 45.4. *Für einen Ring R und ein R -Linksmodul M sind die Funktoren:*

$$- \otimes_R M, M \otimes_R -: \mathbf{Mod}_R^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab} \quad (45.4)$$

additiv.

Beweis. XXXX □

45.1 Eilenberg–Watts-Theorem

Satz 45.5 (Eilenberg–Watts-Theorem). *Für Ringe R und S sowie einen additiven und rechtsexakten Funktor $F: \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_S$ gibt es ein R - S -Bimodul M , sodass $F \simeq B \otimes_R -$.*

Beweis. XXXX □

Definition 45.6 (Additive Kategorie). *Enthält eine präadditive Kategorie $\mathcal{C}$ ein Nullobjekt und endliche Produkte wird sie additiv genannt.*

Definition 45.7 (Abelsche Kategorie). *Eine präadditive Kategorie $\mathcal{C}$, für die:*

- I.) Es gibt ein Nullobjekt*
 - II.) Es gibt endliche Biproducte*
 - III.) Es gibt Kerne und Kokerne*
 - IV.) Jeder Monomorphismus ist ein Kern und jeder Epimorphismus ist ein Kokern.*
- wird abelsch genannt.*

Lemma 45.8. *Additive Kategorien $(\mathbb{C}, +, 0)$ sind monoidal.*

Beweis. □

Eine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$, für die für jedes Objekt $X \in \mathbb{C}$ ein injektives Objekt $I \in \text{Ob } \mathcal{C}$ bzw. projektives Objekt $P \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und ein Monomorphismus $X \hookrightarrow I$ bzw. Epimorphismus $P \twoheadrightarrow X$ existiert, hat genügend viele injektive bzw. projektive Objekte.

Lemma 45.9. *Für eine XXXX Kategorie $\mathcal{I}$ und eine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$ mit genügend vielen injektiven bzw. projektiven Objekten hat $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ ebenfalls genügend viele injektive bzw. projektive Objekte.*

Beweis. □

Lemma 45.10. *Für eine XXXX Kategorie $\mathcal{I}$ und eine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$ ist der Funktor $\varprojlim_{i \in I}: \mathbb{C}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{C}$ linksexakt.*

Beweis. □

$$\varprojlim_{i \in I}^n := R^n \varprojlim_{i \in I}: \mathbb{C}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{C} \quad (45.5)$$

45.2 Einbettungssatz von Mitchell

Satz 45.11 (Einbettungssatz von Mitchell). *Für jede kleine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$:*

- I.) gibt es einen exakten treuen Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$*
- II.) gibt es einen Ring R und einen exakten volltreuen Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$*

Beweis. XXXX □

Kapitel 46

Triangulierte Kategorien

Definition 46.1 (Triangulierte Kategorie). *Eine additive Kategorie $\mathcal{C}$ und ein additiver Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, der eine Kategorienäquivalenz ist, für die*

Kapitel 47

Exakte Funktoren

Definition 47.1 (Exakter Funktor). Für präadditive Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist ein additiver Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, für den für jede kurze exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0 \quad (47.1)$$

mit $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ jeweils

I.) die Sequenz:

$$FX \rightarrow FY \rightarrow FZ \quad (47.2)$$

exakt ist, ein halbexakter Funktor

II.) die Sequenz:

$$0 \rightarrow FX \rightarrow FY \rightarrow FZ \quad (47.3)$$

exakt ist, ein linksexakter Funktor

III.) die Sequenz:

$$FX \rightarrow FY \rightarrow FZ \rightarrow 0 \quad (47.4)$$

exakt ist, ein rechtsexakter Funktor

IV.) die Sequenz:

$$0 \rightarrow FX \rightarrow FY \rightarrow FZ \rightarrow 0 \quad (47.5)$$

exakt ist, ein exakter Funktor

Lemma 47.2. Ein Funktor ist genau dann linksexakt, wenn er endliche Limiten erhält.

Beweis. XXXX □

Da Monomorphismen nach XXXX insbesondere endliche Limiten sind, folgt:

Korollar 47.3. Ein linksexakter Funktor erhält Monomorphismen.

Lemma 47.4. Ein Funktor ist genau dann rechtsexakt, wenn er endliche Kolimiten erhält.

Da Epimorphismen nach XXXX insbesondere endliche Kolimiten sind, folgt:

Korollar 47.5. Ein rechtsexakter Funktor erhält Epimorphismen.

Beweis. XXXX □

Lemma 47.6. *Ein Funktor zwischen abelschen Kategorien ist genau dann linksexakt, wenn er direkte Summen und Kerne erhält.*

Beweis. XXXX □

Lemma 47.7. *Ein Funktor zwischen abelschen Kategorien ist genau dann rechtsexakt, wenn er direkte Summen und Kokerne erhält.*

Beweis. XXXX □

Lemma 47.8. *Für eine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ exakt.*

Beweis. XXXX □

Lemma 47.9. *Für eine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ linksexakt.*

Beweis. XXXX □

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

Lemma 47.10. *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ sind die Tensorprodukt-Funktoren $(X \otimes -): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $(- \otimes X): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ rechtsexakt.*

Beweis. □

Lemma 47.11. *Für additive Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sowie einen exakten Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist $F(0) \cong 0$.*

Beweis. □

Ist $f: M \rightarrow N$ der Nullmorphimus, faktorisiert er als kurze exakte Sequenz $f: M \rightarrow 0 \rightarrow N$, womit $Ff: FM \rightarrow F0 \cong 0 \rightarrow FN$ exakt ist, also Ff der Nullmorphimus.

Lemma 47.12. *Für additive Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ erhält ein exakter Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Bilder:*

$$\bigvee_{f \in \text{Ar } \mathcal{C}} : F \text{img}(f) \cong \text{img}(Ff) \quad (47.6)$$

Beweis. □

Teil VII

Monoidale Kategorien

Kapitel 48

Monoidale Kategorien

Definition 48.1 (Monoidale Kategorie). *Eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit einem kovarianten Funktor $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, dem Tensorprodukt, einem Objekt $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$, dem Einheitsselement des Tensorprodukts, und natürlichen Isomorphismen:*

$$I.) \ a: (- \otimes -) \otimes - \xrightarrow{\cong} - \otimes (- \otimes -) \text{ mit } a_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)$$

$$II.) \ l: 1 \otimes - \xrightarrow{\cong} - \text{ mit } l_X: 1 \otimes X \xrightarrow{\cong} X$$

$$III.) \ r: - \otimes 1 \xrightarrow{\cong} - \text{ mit } r_X: X \otimes 1 \xrightarrow{\cong} X$$

für welche die Dreieck- und Fünfeck-Identität:

$$r_X \otimes \text{id}_Y = (\text{id}_X \otimes l_Y) \circ a_{X,1,Y} \quad (48.1)$$

$$a_{A,B,C \otimes D} \circ a_{A \otimes B,C,D} = (\text{id}_A \otimes a_{B,C,D}) \circ a_{A,B \otimes C,D} \circ (a_{A,B,C} \otimes \text{id}_D) \quad (48.2)$$

erfüllt sind, also für welche die Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes 1) \otimes Y & \xrightarrow{a_{X,1,Y}} & X \otimes (1 \otimes Y) \\ & \searrow r_Y \otimes \text{id}_Y \quad \swarrow \text{id}_X \otimes l_Y & \\ & X \otimes Y & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & \xrightarrow{a_{A \otimes B,C,D}} & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \xrightarrow{a_{W,X,Y \otimes D}} & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\ \downarrow a_{A,B,C} \otimes \text{id}_D & & & & \uparrow \text{id}_A \otimes a_{B,C,D} \\ (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & \xrightarrow{a_{A,B \otimes C,D}} & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) & & \end{array}$$

kommutieren, ist eine monoidale Kategorie $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$.

Eine monoidale Kategorie, für die ihre natürlichen Isomorphismen alle die Identität sind, also:

$$\forall X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}: (X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z) \quad (48.3)$$

$$\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}: 1 \otimes X = X \otimes 1 = X \quad (48.4)$$

wird *strikt* genannt. Die Dreiecks- und Fünfecks-Identität werden damit trivial.

Korollar 48.2. *Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist $(\text{End } \mathcal{C}, \circ, \text{id}_{\mathcal{C}})$ eine strikte monoidale Kategorie.*

Lemma 48.3. Für eine monoidale Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:

$$l_{1 \otimes X} = \text{id}_1 \otimes l_X: 1 \otimes (1 \otimes X) \rightarrow 1 \otimes X \quad (48.5)$$

$$r_{X \otimes 1} = r_X \otimes \text{id}_1: (X \otimes 1) \otimes 1 \rightarrow X \otimes 1 \quad (48.6)$$

Beweis. □

Lemma 48.4. Für eine monoidale Kategorie $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ und Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:

$$l_X \otimes \text{id}_Y = l_{X \otimes Y} \circ a_{1, X, Y} \quad (48.7)$$

$$r_{X \otimes Y} = (\text{id}_X \otimes r_Y) \circ a_{X, Y, 1} \quad (48.8)$$

also die Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} (1 \otimes X) \otimes Y & \xrightarrow{l_X \otimes \text{id}_Y} & X \otimes Y \\ & \searrow a_{1, X, Y} & \nearrow l_{X \otimes Y} \\ & 1 \otimes (X \otimes Y) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes Y) \otimes 1 & \xrightarrow{r_{X \otimes Y}} & X \otimes Y \\ & \searrow a_{X, Y, 1} & \nearrow \text{id}_X \otimes r_Y \\ & X \otimes (Y \otimes 1) & \end{array}$$

kommutieren.

Beweis. □

Lemma 48.5. In einer monoidalen Kategorie ist $l_1 = r_1: 1 \otimes 1 \rightarrow 1$.

Beweis. Mit den Gleichungen (48.7) und () sowie der Dreiecks-Identität (48.1) ist:

$$l_1 \otimes \text{id}_1 = l_{1 \otimes 1} \circ a_{1, 1, 1} = (\text{id}_1 \otimes l_1) \circ a_{1, 1, 1} = r_1 \otimes \text{id}_1 \quad (48.9)$$

□

Im Folgenden sei $i := l_1 = r_1$ der *Einheitsisomorphismus*.

Lemma 48.6. Für eine monoidale Kategorie $\mathcal{C}$ mit Einheitselement $1 \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist $\text{End}(1)$ kommutativ.

Beweis. Der Einheitsisomorphismus $i: 1 \otimes 1 \rightarrow 1$ induziert einen Isomorphismus $j: \text{End}(1) \rightarrow \text{End}(1 \otimes 1)$, $f \mapsto i \circ f \circ i^{-1}$, für den:

$$j(\text{id}_1 \otimes f) = i \circ (\text{id}_1 \otimes f) \circ i^{-1} = (\text{id}_1 \otimes f) \circ i^{-1} = f \quad (48.10)$$

$$j(f \otimes \text{id}_1) = i \circ (f \otimes \text{id}_1) \circ i^{-1} = (f \otimes \text{id}_1) \circ i^{-1} = f \quad (48.11)$$

$$f \circ g = j(f \otimes g) = j((f \otimes \text{id}_1) \circ (\text{id}_1 \otimes g)) = j((\text{id}_1 \otimes g) \circ (f \otimes \text{id}_1)) = j(g \otimes f) = g \circ f \quad (48.12)$$

□

48.1 Spezielle monoidale Kategorien

Definition 48.7 (Geschlossene monoidale Kategorie). *Eine monoidale Kategorie $(\mathbb{C}, \otimes, 1)$, für die $\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ für den Funktor $Y \mapsto Y \otimes X$ ein rechtsadjungierter Funktor $Y \mapsto [X, Y]$ existiert mit:*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, [Y, Z]) \quad (48.13)$$

wird geschlossen genannt.

Lemma 48.8. *In einer geschlossenen monoidalen Kategorie $(\mathbb{C}, \otimes)$ ist:*

$$\forall X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}: [X \otimes Y, Z] \cong [X, [Y, Z]] \quad (48.14)$$

Beweis. Sei $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ beliebig, dann ist:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, [X \otimes Y, Z]) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes (X \otimes Y), Z) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}((A \otimes X) \otimes Y, Z) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes X, [Y, Z]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, [X, [Y, Z]]), \end{aligned} \quad (48.15)$$

womit die Aussage aus der Volltreueheit der Yoneda-Einbettung nach dem Yoneda-Lemma () folgt. $\square$

Lemma 48.9. *Für eine vollständige geschlossene monoidale Kategorie $(\mathbb{C}, \otimes)$ und eine kleine Kategorie $\mathcal{I}$ ist $\text{Fct}(\mathcal{I}, \mathbb{C})$ mit dem Tensorprodukt:*

$$\forall F, G \in \text{Fct}(\mathcal{I}, \mathbb{C}) \forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}: (F \otimes G)X = FX \otimes GX \quad (48.16)$$

eine geschlossene monoidale Kategorie.

Beweis. $\square$

Lemma 48.10. *Für eine kleine Kategorie $\mathcal{I}$, eine geschlossene monoidale Kategorie $\mathcal{C}$ und einen Funktor $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ist:*

$$[i \in \mathcal{I} Fi, X] \cong \lim_{i \in \mathcal{I}} [Fi, X] \quad (48.17)$$

$$[X, \lim_{i \in \mathcal{I}} Fi] \cong \lim_{i \in \mathcal{I}} [X, Fi] \quad (48.18)$$

Beweis. Sei $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ beliebig, dann ist:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, [i \in \mathcal{I} Fi, X]) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes_{i \in \mathcal{I}} Fi, X) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(i \in \mathcal{I} A \otimes Fi, X) \\ &\cong \lim_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes Fi, X) \cong \lim_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, [Fi, X]) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \lim_{i \in \mathcal{I}} [Fi, X]) \end{aligned} \quad (48.19)$$

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, [X, \lim_{i \in \mathcal{I}} Fi]) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes X, \lim_{i \in \mathcal{I}} Fi) \cong \lim_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes X, Fi) \\ &\cong \lim_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, [X, Fi]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \lim_{i \in \mathcal{I}} [X, Fi]), \end{aligned} \quad (48.20)$$

womit die Aussage aus der Volltreueheit der Yoneda-Einbettung nach dem Yoneda-Lemma () folgt. $\square$

Definition 48.11 (Geflochtene monoidale Kategorie). *Eine monoidale Kategorie $\mathcal{C}$ mit einem natürlichen Isomorphismus $B_{X,Y}: X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$, für welche die Sechseck-Identitäten:*

$$a_{Y,Z,X} \circ B_{X,Y \otimes Z} \circ a_{X,Y,Z} = (\text{id}_Y \otimes B_{X,Z}) \circ a_{Y,X,Z} \circ (B_{X,Y} \otimes \text{id}_Z) \quad (48.21)$$

$$a_{Z,X,Y}^{-1} \circ B_{X \otimes Y,Z} \circ a_{X,Y,Z}^{-1} = (\text{id}_X \otimes B_{Y,Z}) \circ a_{X,Z,Y}^{-1} \circ (B_{X,Z} \otimes \text{id}_Y) \quad (48.22)$$

erfüllt sind, also für welche die Diagramme:

$$\begin{array}{ccccc} (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} & X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{B_{X,Y \otimes Z}} & (Y \otimes Z) \otimes X \\ B_{X,Y} \otimes \text{id}_Z \downarrow & & & & \downarrow a_{Y,Z,X} \\ (Y \otimes X) \otimes Z & \xrightarrow{a_{Y,X,Z}} & Y \otimes (X \otimes Z) & \xrightarrow{\text{id}_Y \otimes B_{X,Z}} & Y \otimes (Z \otimes X) \\ \\ X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}^{-1}} & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{B_{X \otimes Y,Z}} & Y \otimes (X \otimes Y) \\ \text{id}_X \otimes B_{Y,Z} \downarrow & & & & \downarrow a_{Z,X,Y}^{-1} \\ X \otimes (Z \otimes Y) & \xrightarrow{a_{X,Z,Y}^{-1}} & (X \otimes Z) \otimes Y & \xrightarrow{B_{X,Z} \otimes \text{id}_Y} & (Z \otimes X) \otimes Y \end{array}$$

kommutieren, ist eine geflochtene monoidale Kategorie.

Eine geflochtene monoidale Kategorie mit $B_{Y,X} \circ B_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}$ wird *symmetrische monoidale Kategorie* genannt.

Lemma 48.12. *Für eine geflochtene monoidale Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:*

$$l_X = r_X \circ B_{1,X}, \quad (48.23)$$

womit das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} 1 \otimes X & \xrightarrow{B_{1,X}} & X \otimes 1 \\ & \searrow l_X \quad \swarrow r_X & \\ & X & \end{array}$$

kommutiert.

Beweis.

□

Für eine kleine monoidale Kategorie $\mathcal{C}$ ist $\widehat{\mathcal{C}}$ eine geschlossene monoidale Kategorie.

$(\mathbf{Set}, \times, \{*\})$ und $(\mathbf{Set}, \sqcup, \emptyset)$ sind symmetrische monoidale Kategorien. $(\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}, \otimes_{\mathbb{K}}, \mathbb{K})$ mit einem Körper $\mathbb{K}$ ist eine symmetrische monoidale Kategorie.

$$B_{U,V}: U \otimes_{\mathbb{K}} V \rightarrow V \otimes_{\mathbb{K}} U \quad (48.24)$$

$$\text{ev}: V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{K}, (f, v) \mapsto f(v) \quad (48.25)$$

$$\text{coev}: \mathbb{K} \rightarrow V \otimes V^*, x \mapsto ? \quad (48.26)$$

$(\mathbf{Bord}_n, \sqcup, \emptyset)$ ist eine symmetrische monoidale Kategorie.

$$\begin{aligned} a_{X,Y,Z}: (X \sqcup Y) \sqcup Z &= (X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}) \times \{0\} \cup Z \times \{1\} \\ &\rightarrow X \sqcup (Y \sqcup Z) = X \times \{0\} \cup (Y \times \{0\} \cup Z \times \{1\}) \times \{1\}, \\ &\begin{cases} ((x, 0), 0) & \mapsto (x, 0) \\ ((y, 1), 0) & \mapsto ((y, 0), 1) \\ (z, 1) & \mapsto ((z, 1), 1) \end{cases} \end{aligned} \quad (48.27)$$

$$l_X: \emptyset \sqcup X = X \times \{1\} \rightarrow X, (x, 1) \mapsto x \quad (48.28)$$

$$r_X: X \sqcup \emptyset = X \times \{0\} \rightarrow X, (x, 0) \mapsto x \quad (48.29)$$

$$B_{X,Y}: X \sqcup Y \rightarrow Y \sqcup X, (x, 0) \mapsto (x, 1), (y, 1) \mapsto (y, 0) \quad (48.30)$$

48.2 Duale Objekte

Definition 48.13 (*-autonome Kategorie). *Eine symmetrische monoidale Kategorie $(\mathcal{C}, \otimes)$ mit einem volltreuen Funktor $\cdot^*: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$, für den:*

$$\forall X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, (Y \otimes Z)^*), \quad (48.31)$$

*ist eine *-autonome Kategorie.*

Lemma 48.14. *Eine *-autonome Kategorie $(\mathcal{C}, \otimes)$, für die:*

$$\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}: (X \otimes Y)^* \cong X^* \otimes Y^* \quad (48.32)$$

ist kompakt abgeschlossen.

Beweis. □

Definition 48.15 (Rechtsduales Objekt). *Für eine monoidale Kategorie $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ und ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist ein Objekt $X^* \in \text{Ob } \mathcal{C}$ mit einer Evaluationsabbildung $\text{ev}: X^* \otimes X \rightarrow 1$ und einer Koevaluationsabbildung $\text{coev}: 1 \rightarrow X \otimes X^*$, für welche:*

$$l_X = r_X \circ (\text{id}_X \otimes \text{ev}) \circ a_{X,X^*,X} \circ (\text{coev} \otimes \text{id}_X) \quad (48.33)$$

$$r_{X^*} = l_{X^*} \circ (\text{ev} \otimes \text{id}_{X^*}) \circ a_{X^*,X,X^*}^{-1} \circ (\text{id}_{X^*} \otimes \text{coev}), \quad (48.34)$$

also die Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} 1 \otimes X & \xrightarrow{l_X} & X \\ \text{coev} \otimes \text{id}_X \downarrow & & \uparrow r_X \\ (X \otimes X^*) \otimes X & \xrightarrow{a_{X,X^*,X}} X \otimes (X^* \otimes X) \xrightarrow{\text{id}_X \otimes \text{ev}} & X \otimes 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X^* \otimes 1 & \xrightarrow{r_{X^*}} & X^* \\ \text{id}_{X^*} \otimes \text{coev} \downarrow & & \uparrow l_{X^*} \\ X^* \otimes (X \otimes X^*) & \xrightarrow{a_{X^*,X,X^*}^{-1}} (X^* \otimes X) \otimes X^* \xrightarrow{\text{ev} \otimes \text{id}_{X^*}} & 1 \otimes X^* \end{array}$$

kommutieren, das rechtsduale Objekt von X .

Existiert für ein Objekt ein rechtsduales Objekt wird es *rechtsdualisierbar* genannt. Eine monoidale Kategorie, in der für jedes Objekt ein rechtsduales Objekt existiert, also rechtsdualisierbar ist, wird *rechtstarr* genannt.

In einer geschlossenen monoidalen Kategorie $\mathcal{C}$ ist für ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ das rechtsduale Objekt definiert als:

$$X^* := [X, 1] \quad (48.35)$$

Lemma 48.16. *Das rechtsduale Objekt ist eindeutig bis auf Isomorphie.*

Beweis. XXXX □

Lemma 48.17. *Das rechtsduale des rechtsdualen Objektes ist wieder das Objekt selbst.*

$$X^{**} \otimes X^* \xrightarrow{\text{ev}_{X^*}} 1 \xrightarrow{\text{coev}_X} X \otimes X^* \quad (48.36)$$

$$X^* \otimes X \xrightarrow{\text{ev}_X} 1 \xrightarrow{\text{coev}_{X^*}} X^* \otimes X^{**} \quad (48.37)$$

$$\begin{aligned} (X^{**} \otimes X^*) \otimes X &\xrightarrow{\text{ev}_{X^*} \otimes \text{id}_X} 1 \otimes X \xrightarrow{l_X} X \\ X^* \otimes X &\xrightarrow{\text{ev}_X} 1 \xrightarrow{\text{coev}_{X^*}} X^* \otimes X^{**} \end{aligned} \quad (48.38)$$

Beweis. XXXX

$$\begin{array}{ccc} (X^{**} \otimes X^*) \otimes X & \xrightarrow{a_{X^{**}, X^*, X}} & X^{**} \otimes (X^* \otimes X) \\ \text{ev}_{X^*} \otimes \text{id}_X \downarrow & & \text{id}_{X^{**}} \otimes \text{ev}_X \downarrow \\ 1 \otimes X & & X^{**} \otimes 1 \\ \text{coev}_X \otimes \text{id}_X \downarrow & & \\ (X \otimes X^*) \otimes X & & \end{array}$$

□

Lemma 48.18. *Für eine monoidale Kategorie $\mathcal{C}$, ein Objekt $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ mit rechtsdualem Objekt $Y^* \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:*

$$\forall X, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y^* \otimes Z) \quad (48.39)$$

Beweis. □

Definition 48.19 (Rechtsdualer Morphismus). *Für eine monoidale Kategorie $\mathcal{C}$, rechtsdualisierbare Objekten $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einen Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ist $f^*: Y^* \rightarrow X^*$ mit:*

$$\begin{array}{ccccc} Y^* & & (Y^* \otimes X) \otimes X^* & \xrightarrow{(\text{id}_{Y^*} \otimes f) \otimes \text{id}_{X^*}} & (Y^* \otimes Y) \otimes X^* & \xrightarrow{\text{ev}_Y \otimes \text{id}_{X^*}} & 1 \otimes X^* \\ \downarrow r_Y^{-1} & & \uparrow a_{Y^*, X, X^*}^{-1} & & \uparrow \text{ev}_Y \otimes \text{id}_{X^*} & & \downarrow l_{X^*} \\ Y^* \otimes 1 & \xrightarrow{\text{id}_{Y^*} \otimes \text{coev}_X} & Y^* \otimes (X \otimes X^*) & \xrightarrow{\text{id}_{Y^*} \otimes (f \otimes \text{id}_{X^*})} & Y^* \otimes (Y \otimes X^*) & & X^* \end{array}$$

der rechtsduale Morphismus.

Definition 48.20 (Linksduales Objekt). *Für eine monoidale Kategorie $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ und ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist ein Objekt $*X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ mit einer Evaluationsabbildung $\text{ev}: X \otimes *X \rightarrow 1$ und einer Koevaluationsabbildung $\text{coev}: 1 \rightarrow *X \otimes X$, für welche:*

$$r_X = l_X \circ (\text{ev} \otimes \text{id}_X) \circ a_{X, *X, X}^{-1} \circ (\text{id}_X \otimes \text{coev}) \quad (48.40)$$

$$l_{*X} = r_{*X} \circ (\text{id}_{X^*} \otimes \text{ev}) \circ a_{*X, X, *X} \circ (\text{coev} \otimes \text{id}_{X^*}), \quad (48.41)$$

also die Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} X \otimes 1 & \xrightarrow{r_X} & X \\ \text{id}_X \otimes \text{coev} \downarrow & & \uparrow l_X \\ X \otimes (*X \otimes X) & \xrightarrow{a_{X, *X, X}^{-1}} (X \otimes *X) \otimes X \xrightarrow{\text{ev} \otimes \text{id}_X} 1 \otimes X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 \otimes *X & \xrightarrow{l_{*X}} & *X \\ \text{coev} \otimes \text{id}_{X^*} \downarrow & & \uparrow r_{X^*} \\ (*X \otimes X) \otimes *X & \xrightarrow{a_{*X, X, *X}} *X \otimes (X \otimes *X) \xrightarrow{\text{id}_{X^*} \otimes \text{ev}} *X \otimes 1 \end{array}$$

kommutieren, das linksduale Objekt von X .

Existiert für ein Objekt ein linksduales Objekt wird es *linksdualisierbar* genannt. Eine monoidale Kategorie, in der für jedes Objekt ein linksduales Objekt existiert, also linksdualisierbar ist, wird *linksstarr* genannt.

Existiert für ein Objekt ein rechts- und linksduales Objekt, ist es also rechts- und linksdualisierbar, wird es *dualisierbar* genannt. Eine monoidale Kategorie, in der für jedes Objekt ein rechts- und linksduales Objekt existiert, die also rechts- und linksstarr ist, wird *starr* genannt.

Lemma 48.21. *Das linksduale Objekt ist eindeutig bis auf Isomorphie.*

Beweis. Analog zum Beweis von Lemma (48.16). □

Lemma 48.22. *Das linksduale des linksdualen Objektes ist wieder das Objekt selbst.*

Beweis. Analog zum Beweis von Lemma (48.17). □

Korollar 48.23. *Eine starre symmetrische monoidale Kategorie ist geschlossen mit:*

$$\forall X, Y: [X, Y] = X^* \otimes Y, \quad (48.42)$$

da:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, [Y, Z]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y^* \otimes Z) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) \quad (48.43)$$

Definition 48.24 (Kompakt abgeschlossene Kategorie). *Eine starre symmetrische monoidale Kategorie wird kompakt abgeschlossen genannt.*

Kapitel 49

Spuren

Definition 49.1 (Spurabbildung). Für eine symmetrische monoidale Kategorie $\mathcal{C}$ und ein rechtsdualisierbares Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:

$$: \text{End}_{\mathcal{C}}(X) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{C}}(1), f \mapsto (f) := \text{ev}_X \circ B_{X,X^*} \circ (f \otimes \text{id}_{X^*}) \circ \text{coev}_X \quad (49.1)$$

$$1 \xrightarrow{\text{coev}_X} X \otimes X^* \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{X^*}} X \otimes X^* \xrightarrow{B_{X,X^*}} X^* \otimes X \xrightarrow{\text{ev}_X} 1$$

dessen Spurabbildung.

Definition 49.2 (Euler-Charakteristik). Für eine symmetrische monoidale Kategorie $\mathcal{C}$ und ein rechtsdualisierbares Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist:

$$\chi(X) := (\text{id}_X) = \text{ev}_X \circ B_{X,X^*} \circ \text{coev}_X \quad (49.2)$$

dessen Euler-Charakteristik.

Definition 49.3 (Kategorie mit Spur). Für eine symmetrische monoidale Kategorie $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ ist $\forall A, B, X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ eine Abbildung:

$$^X_{A,B}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes X, B \otimes X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), \quad (49.3)$$

für die $\forall A, B, C, X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$:

$$\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes 1, B \otimes 1): {}^1_{A,B}(f) = l_A \circ f \circ r_A^{-1} \quad (49.4)$$

$$\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes X \otimes Y, B \otimes X \otimes Y): {}^{X \otimes Y}_{A,B}(f) = {}^X_{A,B}({}^Y_{A \otimes X, B \otimes X}(f)) \quad (49.5)$$

$$\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes X, B \otimes X): {}^X_{C \otimes A, C \otimes B}(\text{id}_C \otimes f) = \text{id}_C \otimes {}^X_{A,B}(f) \quad (49.6)$$

$${}^X_{X,X}(B_{X,X}) = \text{id}_X \quad (49.7)$$

$${}^X_{A,B}(f) = \quad (49.8)$$

$$A \xrightarrow{r_X^{-1}} A \otimes 1 \xrightarrow{\text{id}_A \otimes \text{coev}_X} A \otimes (X \otimes X^*) \xrightarrow{a_{B,X,X^*} \circ (f \otimes \text{id}_{X^*}) \circ a_{A,X,X^*}^{-1}} B \otimes (X \otimes X^*) \xrightarrow{\text{id}_B \otimes (B_{X,X^*} \circ \text{ev}_X)} B \otimes 1 \xrightarrow{l_B} 1$$

Kapitel 50

Monoide und Komonoide

50.1 Monoide

Definition 50.1 (Monoid). Für eine monoidale Kategorie $(\mathbb{C}, \otimes, 1)$ ist ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathbb{C}$ mit Morphismen $\mu: X \otimes X \rightarrow X$ und $\eta: 1 \rightarrow X$, für die:

$$\mu \circ (\mu \otimes \text{id}_X) = \mu \circ (\text{id}_X \otimes \mu) \circ a_{X,X,X} \quad (50.1)$$

$$l_X = \mu \circ (\eta \otimes \text{id}_X) \quad (50.2)$$

$$r_X = \mu \circ (\text{id}_X \otimes \eta), \quad (50.3)$$

also für welche die Diagramme:

$$\begin{array}{ccccc} (X \otimes X) \otimes X & \xrightarrow{a_{X,X,X}} & X \otimes (X \otimes X) \\ \mu \otimes \text{id}_X \downarrow & & \downarrow \text{id}_X \otimes \mu \\ X \otimes X & \xrightarrow{\mu} & X & \xleftarrow{\mu} & X \otimes X \\ & & \downarrow \mu & & \\ 1 \otimes X & \xrightarrow{\eta \otimes \text{id}_X} & X \otimes X & \xleftarrow{\text{id}_X \otimes \eta} & X \otimes 1 \\ & \searrow l_X & \downarrow \mu & \swarrow r_X & \\ & & X & & \end{array}$$

kommutieren, ein Monoid (X, μ, η) in $\mathbb{C}$.

Beispiel 50.2. Das Einheitselement 1 bildet mit $\mu = l_1 = r_1$ nach Lemma (48.5) und $\eta = \text{id}_1$ ein Monoid. Gleichung (XXXX) XXXX, während die Gleichungen (50.2) und (50.3) trivial werden.

Lemma 50.3. Das Tensorprodukt von Monoiden ist ein Monoid.

Beweis. Sei $(\mathbb{C}, \otimes, 1)$ eine monoidale Kategorie und seien (X, μ, η) sowie (X', μ', η') jeweils Monoide in $\mathbb{C}$. XXXX □

Definition 50.4 (Monoidmorphismus). Für eine monoidale Kategorie $(\mathbb{C}, \otimes, 1)$ sowie Monoide (X, μ, η) und (X', μ', η') ist ein Morphismus $f: X \rightarrow X'$, für den:

$$f \circ \mu = \mu' \circ (f \otimes f) \quad (50.4)$$

$$f \circ \eta = \eta', \quad (50.5)$$

also für welchen die Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} X \otimes X & \xrightarrow{f \otimes f} & X' \otimes X' \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ \eta \swarrow & & \searrow \eta' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

kommutieren, ein Monoidmorphismus.

Beispiel 50.5. Die Identität $\text{id}_X: X \rightarrow X$ eines Monoides X ist ein Monoidmorphismus.

Lemma 50.6. Die Komposition von Monoidmorphismen ist ein Monoidmorphismus.

Beweis. XXXX □

Definition 50.7 (Monoidkategorie). Für eine monoidale Kategorie $(\mathbb{C}, \otimes, 1)$ ist $\mathbf{Mon}(\mathbb{C})$ die Kategorie der Monide von $\mathbb{C}$, deren Objekte alle Monoide von $\mathbb{C}$ und deren Morphismen alle Monoidmorphismen sind.

Für monoidale Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ induziert ein laxer monoidaler Funktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ einen Funktor $\mathbf{Mon}(F): \mathbf{Mon}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{Mon}(\mathcal{D})$.

50.2 Komonoide

Definition 50.8 (Komonoid). Für eine monoidale Kategorie $(\mathbb{C}, \otimes, 1)$ ist ein Objekt $X \in \text{Ob } \mathbb{C}$ mit Morphismen $\delta: X \rightarrow X \otimes X$ und $\varepsilon: X \rightarrow 1$, für die:

$$(\text{id}_X \otimes \delta) \circ \delta = a_{X,X,X} \circ (\delta \otimes \text{id}_X) \circ \delta \quad (50.6)$$

$$l_X^{-1} = (\varepsilon \otimes \text{id}_X) \circ \delta \quad (50.7)$$

$$r_X^{-1} = (\text{id}_X \otimes \varepsilon) \circ \delta, \quad (50.8)$$

also für welche die Diagramme:

$$\begin{array}{ccccc} X \otimes X & \xleftarrow{\delta} & X & \xrightarrow{\delta} & X \otimes X \\ \delta \otimes \text{id}_X \downarrow & & & & \downarrow \text{id}_X \otimes \delta \\ (X \otimes X) \otimes X & \xrightarrow{a_{X,X,X}} & & & X \otimes (X \otimes X) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & l_X^{-1} \swarrow & \downarrow \delta & \searrow r_X^{-1} & \\ 1 \otimes X & \xleftarrow{\varepsilon \otimes \text{id}_X} & X \otimes X & \xrightarrow{\text{id}_X \otimes \varepsilon} & X \otimes 1 \end{array}$$

kommutieren, ein Komonoid (X, δ, ε) in $\mathbb{C}$.

Beispiel 50.9. Das Einheitselement 1 bildet mit $\delta = l_1^{-1} = r_1^{-1}$ nach Lemma (48.5) und $\varepsilon = \text{id}_1$ ein Komonoid. Gleichung (XXXX) XXXX, während die Gleichungen (50.7) und (50.8) trivial werden.

Lemma 50.10. Das Tensorprodukt von Komonoiden ist ein Komonoid.

Beweis. Sei $(\mathbb{C}, \otimes, 1)$ eine monoidale Kategorie und seien (X, δ, ε) sowie $(X', \delta', \varepsilon')$ jeweils Komonoide in $\mathbb{C}$. XXXX $\square$

Definition 50.11 (Komonoidmorphismus). *Für eine monoidale Kategorie $(\mathbb{C}, \otimes, 1)$ sowie Komonoide (X, δ, ε) und $(X', \delta', \varepsilon')$ ist ein Morphismus $f: X \rightarrow X'$, für den:*

$$(f \otimes f) \circ \delta = \delta' \circ f \quad (50.9)$$

$$\varepsilon' \circ f = \varepsilon, \quad (50.10)$$

also für welchen die Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta' \\ X \otimes X & \xrightarrow{f \otimes f} & X' \otimes X' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \varepsilon \searrow & & \swarrow \varepsilon' \\ & 1 & \end{array}$$

kommutieren, ein Komonoidmorphismus.

Beispiel 50.12. *Die Identität $\text{id}_X: X \rightarrow X$ eines Komonoides X ist ein Komonoidmorphismus.*

Lemma 50.13. *Die Komposition von Komonoidmorphismen ist ein Komonoidmorphismus.*

Beweis. XXXX $\square$

Kapitel 51

Monoidale Funktoren

Definition 51.1 (Monoidaler Funktor). Für monoidale Kategorien $(\mathbb{C}, \otimes_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{C}})$ und $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, 1_{\mathcal{D}})$ sind ein kovarianter Funktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$, ein Morphismus $\epsilon: 1_{\mathcal{D}} \rightarrow F1_{\mathbb{C}}$ und eine natürliche Transformation $\mu_{X,Y}: FX \otimes_{\mathcal{D}} FY \rightarrow F(X \otimes_{\mathbb{C}} Y)$, für die:

I.) Assoziativität: $\forall X, Y, Z \in \text{Ob } \mathbb{C}$ ist:

$$a_{FX,FY,FZ}^{\mathcal{D}} \circ (\text{id}_{FX} \otimes \mu_{Y,Z}) \circ \mu_{X,Y \otimes_{\mathbb{C}} Z} = (\mu_{X,Y} \otimes \text{id}_{FZ}) \circ \mu_{X \otimes_{\mathbb{C}} Y, Z} \circ F(a_{X,Y,Z}^{\mathbb{C}}) \quad (51.1)$$

II.) Einheitlichkeit: $\forall X \in \text{Ob } \mathbb{C}$ ist:

$$l_{FX}^{\mathcal{D}} = (\epsilon \otimes_{\mathcal{D}} \text{id}_{FX}) \circ \mu_{1_{\mathbb{C}}, X} \circ F(l_X^{\mathbb{C}}) \quad (51.2)$$

$$r_{FX}^{\mathcal{D}} = (\text{id}_{FX} \otimes_{\mathcal{D}} \epsilon) \circ \mu_{X, 1_{\mathbb{C}}} \circ F(r_X^{\mathbb{C}}), \quad (51.3)$$

also für welche die Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} (FX \otimes_{\mathcal{D}} FY) \otimes_{\mathcal{D}} FZ & \xrightarrow{a_{FX,FY,FZ}^{\mathcal{D}}} & FX \otimes_{\mathcal{D}} (FY \otimes_{\mathcal{D}} FZ) \\ \mu_{X,Y} \otimes \text{id}_{FZ} \downarrow & & \downarrow \text{id}_{FX} \otimes \mu_{Y,Z} \\ F(X \otimes_{\mathbb{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} FZ & & FX \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathbb{C}} Z) \\ \mu_{X \otimes_{\mathbb{C}} Y, Z} \downarrow & & \downarrow \mu_{X,Y \otimes_{\mathbb{C}} Z} \\ F((X \otimes_{\mathbb{C}} Y) \otimes_{\mathbb{C}} Z) & \xrightarrow{a_{FX,FY,FZ}^{\mathcal{D}} \otimes \text{id}_{FZ}} & F(X \otimes_{\mathbb{C}} (Y \otimes_{\mathbb{C}} Z)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} FX & \xrightarrow{\epsilon \otimes_{\mathcal{D}} \text{id}_{FX}} & F1_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathcal{D}} FX \\ l_{FX}^{\mathcal{D}} \downarrow & & \downarrow \mu_{1_{\mathbb{C}}, X} \\ FX & \xleftarrow{F(l_X^{\mathbb{C}})} & F(1_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} X) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} FX \otimes_{\mathcal{D}} 1_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\text{id}_{FX} \otimes_{\mathcal{D}} \epsilon} & FX \otimes_{\mathcal{D}} F1_{\mathbb{C}} \\ r_{FX}^{\mathcal{D}} \downarrow & & \downarrow \mu_{X, 1_{\mathbb{C}}} \\ FX & \xleftarrow{F(r_X^{\mathbb{C}})} & F(X \otimes_{\mathbb{C}} 1_{\mathbb{C}}) \end{array}$$

kommutieren, ein schwacher monoidaler Funktor (oder laxer monoidaler Funktor).

Wenn ϵ und $\forall X, Y \in \mu_{X,Y}$ Isomorphismen sind, wird der Funktor *streng monoidal* genannt. Ein monoidaler Funktor $F: \mathbb{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ wird *oplax* genannt.

Lemma 51.2. *Laxe monoidale Funktoren bilden Monoide auf Monoide ab.*

Beweis.

□

Korollar 51.3. *Oplaxe monoidale Funktoren bilden Komonoide auf Komonoide ab.*

Kapitel 52

Geschlossene Funktoren

Definition 52.1 (Schwacher geschlossener Funktor). *Für geschlossene monoidale Kategorien $(\mathbb{C}, 1_{\mathbb{C}})$ und $(\mathcal{D}, 1_{\mathcal{D}})$ wird ein Funktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ mit einem Morphismus $f: F1_{\mathbb{C}} \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ und einer natürlichen Transformation $\eta: F[-, -] \Rightarrow [F-, F-]$, für die: also für welche die Diagramme: kommutieren, schwach geschlossen genannt.*

Definition 52.2 (Strenger geschlossener Funktor). *Für geschlossene monoidale Kategorien $(\mathbb{C}, 1_{\mathbb{C}})$ und $(\mathcal{D}, 1_{\mathcal{D}})$ wird ein Funktor $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$, für den:*

$$F1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathcal{D}} \tag{52.1}$$

$$\forall X, Y \in \text{Ob } \mathbb{C}: F([X, Y]_{\mathbb{C}}) = [FX, FY]_{\mathcal{D}} \tag{52.2}$$

streng geschlossen genannt.

Teil VIII

Höhere Kategorientheorie

Kapitel 53

Angereicherte Kategorien

Definition 53.1 (Angereicherte Kategorie). *Für eine Kategorie $\mathcal{V}$ wird eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit:*

$$\forall_{X,Y \in \text{Ob } \mathcal{C}} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \in \text{Ob } \mathcal{V} \quad (53.1)$$

eine $\mathcal{V}$ -Kategorie (oder $\mathcal{V}$ -angereicherte Kategorie) genannt.

Der Hom-Funktor wird damit zu einem Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{C}} : \mathbb{C}^{\text{op}} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{V}$.

Eine **Top**-Kategorie wird auch *topologisch angereichert* genannt. Eine **Vect** $_{\mathbb{K}}$ -Kategorie wird auch *$\mathbb{K}$ -linear* (oder *$\mathbb{K}$ -Algebroid*) genannt. Allgemeiner wird für einen Ring R eine **Mod** $_R$ -Kategorie auch *R -linear* genannt. Eine **Ab**-Kategorie, also eine $\mathbb{Z}$ -lineare Kategorie, wird auch *Ringoid* genannt.

Beispiel 53.2. *Lokal kleine Kategorien sind Set-Kategorien, präadditive Kategorien sind Ab-Kategorien.*

Beispiel 53.3. *Top ist mit der Kompakt-Offen-Topologie topologisch angereichert. Vect $_{\mathbb{K}}$ ist Vect $_{\mathbb{K}}$ -angereichert.*

Funktoren bestehen durch ihre Definition aus einer Abbildung auf Objekten und einer Abbildung auf Morphismen. Bei Funktoren zwischen über der gleichen Kategorie angereicherten Kategorien ist daher die Betrachtung von Funktoren sinnvoll, für welche die Abbildung auf Morphismen selbst in dieser Kategorie enthalten ist.

Definition 53.4 (Angereicherter Funktor). *Für eine Kategorie $\mathcal{V}$ wird ein (kovarianter) Funktor $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwischen $\mathcal{V}$ -angereicherten Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ mit:*

$$\forall_{X,Y \in \text{Ob } \mathbb{C}} : F_{X,Y} \in \text{Ar } \mathcal{V} \quad (53.2)$$

ein $\mathcal{V}$ -Funktor (oder $\mathcal{V}$ -angereicherter Funktor) genannt.

$$\mathbf{Cat}^{(2)} := \mathbf{Cat}^{(\mathbf{Cat})} \quad (53.3)$$

$$\mathbf{Cat}^{(k+1)} := \mathbf{Cat}^{(k)}^{(\mathbf{Cat})} \quad (53.4)$$

Kapitel 54

2-Kategorien

Die (lokal kleine) Kategorie **Cat** der kleinen Kategorien verfügt über kleine Kategorien als Objekte und Funktoren zwischen diesen als Morphismen. Für kleine Kategorien $\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ verfügt die nach Lemma (XXXX) lokal kleine Kategorie $\mathbf{Fct}(\mathbb{C}, \mathcal{D}) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbb{C}, \mathcal{D})$ mit den Funktoren nun als Objekten aufgefasst zusätzlich über natürliche Transformationen als Morphismen.

Ein Monoid M entspricht eineindeutig einer 1-Kategorie $\mathbf{BM}$ mit einem Objekt. Eine monoidale 1-Kategorie $\mathcal{C}$ entspricht analog eineindeutig einer 2-Kategorie $\mathbf{BC}$ mit einem Objekt.

Sei $\mathbb{C}$ eine 2-Kategorie

Für eine monoidale (∞, n) -Kategorie $\mathcal{C}$ lässt sich eine monoidale $(\infty, n-1)$ -Kategorie $\Omega\mathbb{C}$ definieren.

$$\Omega\mathbb{C} := \mathbf{Map}_{\mathbb{C}}(1, 1) \quad (54.1)$$

Für eine monoidale (∞, n) -Kategorie $\mathcal{C}$ lässt sich eine monoidale $(\infty, n+1)$ -Kategorie $\mathbf{BC}$ mit einem einzigen Objekt definieren.

54.1 Calabi–Yau-Kategorien (CY-Kategorien)

Definition 54.1 (Calabi–Yau-Kategorie). *Eine $\mathbb{K}$ -lineare Kategorie $\mathcal{C}$ und eine Abbildung:*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{C}}: \mathbf{End}_{\mathcal{C}}(X) \rightarrow \mathbb{K}, \quad (54.2)$$

für jedes Objekt $X \in \mathbf{Ob}\mathcal{C}$, für welche die Abbildung:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \rightarrow \mathbb{K}, \langle f, g \rangle := (g \circ f) \quad (54.3)$$

für alle Objekte $X, Y \in \mathbf{Ob}\mathcal{C}$ symmetrisch und nicht degeneriert ist, eine Calabi–Yau-Kategorie (oder CY-Kategorie).

54.2 ?

Definition 54.2 ((n, m) -Kategorie). *Eine n -Kategorie, für die alle k -Morphismen für $m < k \leq n$ invertierbar sind, ist eine (m, n) -Kategorie.*

Beispiel 54.3. *Eine $(n, 0)$ -Kategorie ist ein n -Gruppoid und eine (n, n) -Kategorie ist eine n -Kategorie.*

Teil IX

Anhang

Kapitel 55

Auflistung spezieller Kategorien

55.1 Algebraische Kategorien

55.1.1 Gruppentheoretische Kategorien

Mag ist die *Kategorie der Magmen*, deren Objekte alle Magmen und deren Morphismen alle Magmenhomomorphismen sind. Die Kategorie **AbMag** der abelschen Magmen bildet eine volle Unterkategorie. Die Kategorien **Mag_{fin}** und **AbMag_{fin}** der endlichen (abelschen) Magmen bilden von diesen jeweils volle Unterkategorien.

HGrp ist die *Kategorie der Halbgruppen*, deren Objekte alle Halbgruppen und deren Morphismen alle Halbgruppenhomomorphismen sind. Die Kategorie **AbHGrp** der abelschen Halbgruppen bildet eine volle Unterkategorie. Die Kategorien **HGrp_{fin}** und **AbHGrp_{fin}** der endlichen (abelschen) Halbgruppen bilden von diesen jeweils volle Unterkategorien.

Mon ist die *Kategorie der Monoide*, deren Objekte alle Monoide und deren Morphismen alle Monoidhomomorphismen sind. Die Kategorie **AbMon** der abelschen Monoide bildet eine volle Unterkategorie. Die Kategorien **Mon_{fin}** und **AbMon_{fin}** der endlichen (abelschen) Monoide bilden von diesen jeweils volle Unterkategorien.

Grp ist die *Kategorie der Gruppen*, deren Objekte alle Gruppen und deren Morphismen alle Gruppenhomomorphismen sind. Die Kategorie **AbGrp** der abelschen Gruppen bildet eine volle Unterkategorie. Die Kategorien **Grp_{fin}** und **AbGrp_{fin}** der endlichen (abelschen) Gruppen bilden von diesen jeweils volle Unterkategorien.

Sei G eine Gruppe, dann ist ${}_G\mathbf{Mod}$ bzw. $\mathbf{Mod}_G$ die *Kategorie der G -Links- bzw. Rechtsmoduln*, deren Objekte alle G -Links- bzw. Rechtsmoduln und deren Morphismen alle G -Links- bzw. Rechtsmodulhomomorphismen sind.

55.1.2 Ringtheoretische Kategorien

Rng und **CRng** sind jeweils die *Kategorie der (kommutativen) Ringe*, deren Objekte alle (kommutativen) Ringe und deren Morphismen alle Ringhomomorphismen sind.

Ring und **CRing** sind jeweils die *Kategorie der unitären (kommutativen) Ringe*, deren

Objekte alle unitären (kommutativen) Ringe und deren Morphismen alle Ringhomomorphismen sind.

Sei R ein Ring, dann ist ${}_R\mathbf{Mod}$ bzw. $\mathbf{Mod}_R$ die *Kategorie der R -Links- bzw. Rechtsmoduln*, deren Objekte alle R -Links- bzw. Rechtsmoduln und deren Morphismen alle R -Links- bzw. Rechtsmodulhomomorphismen sind.

55.1.3 Körpertheoretische Kategorien

Field ist die *Kategorie der Körper*, deren Objekte alle Körper und deren Morphismen alle Körperhomomorphismen sind. Die Kategorie **Field** $_p$ der Körper mit Charakteristik p bildet eine volle Unterkategorie.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, dann ist **Vect** $_{\mathbb{K}}$ die *Kategorie der $\mathbb{K}$ -Vektorräume*, deren Objekte alle $\mathbb{K}$ -Vektorräume und deren Morphismen alle Vektorraumhomomorphismen sind.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, dann ist **Norm** $_{\mathbb{K}}$ die *Kategorie der normierten $\mathbb{K}$ -Vektorräume*, deren Objekte alle normierten $\mathbb{K}$ -Vektorräume und deren Morphismen alle stetigen Vektorraumhomomorphismen sind.

55.2 Topologische Kategorien

Met ist die *Kategorie der metrischen Räume*, deren Objekte alle metrischen Räume und deren Morphismen alle stetigen Abbildungen sind.

Man $_{\infty}$ und **Man** $_{\infty}^*$ sind jeweils die *Kategorie der (punktierten) glatten Mannigfaltigkeiten*, deren Objekte alle (punktierten) glatten Mannigfaltigkeiten und deren Morphismen alle (punktierten) glatten Abbildungen sind.

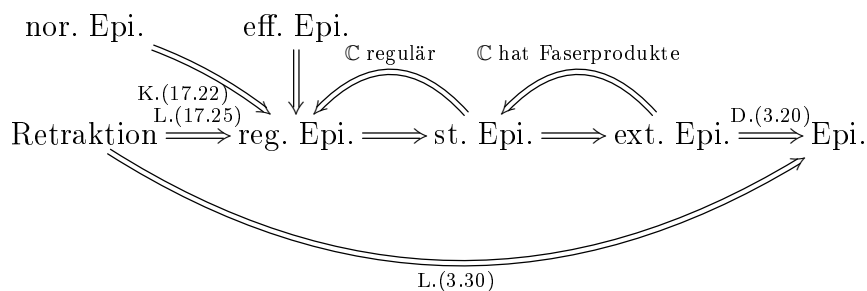
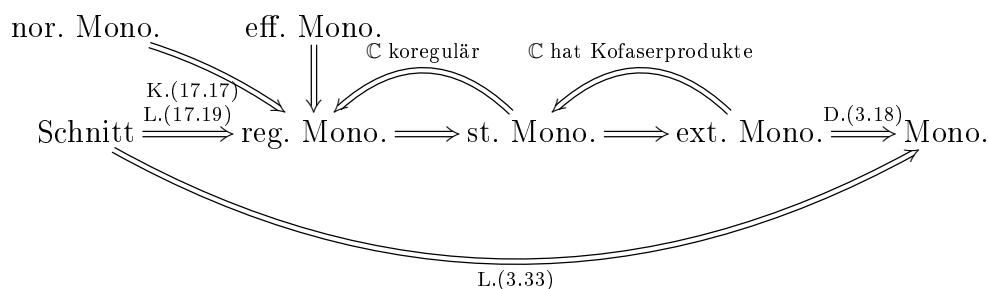
Man $_{\omega}$ und **Man** $_{\omega}^*$ sind jeweils die *Kategorie der (punktierten) analytischen Mannigfaltigkeiten*, deren Objekte alle (punktierten) analytischen Mannigfaltigkeiten und deren Morphismen alle analytischen Abbildungen sind.

RieMan ist die *Kategorie der Riemann-Mannigfaltigkeiten*, deren Objekte alle Riemann-Mannigfaltigkeiten und deren Morphismen alle isometrischen Abbildungen sind.

RieSur ist die *Kategorie der Riemannschen Flächen*, deren Objekte alle Riemannschen Flächen und deren Morphismen alle holomorphen Abbildungen sind.

Kapitel 56

Auflistung von Lemmata



	Schnitt	reg. Mono.	st. Mono.	ext. Mono.	Mono.
Retraktion	Iso.	Iso.	Iso.	Iso.	Iso., L.(3.31)
reg. Epi.	Iso.	Iso.	Iso.	Iso.	Iso., L.(17.26)
st. Epi.	Iso.	Iso.	Iso.	Iso.	Iso.
ext. Epi.	Iso.	Iso.	Iso.	Iso.	Iso., L.(3.22)
Epi.	Iso., L.(3.36)	Iso., L.(17.26)	Iso.	Iso., L.(3.22)	

Literaturverzeichnis

- [1] Emily Riehl, *Category Theory in Context*; <https://math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf>
- [2] Jiří Adámek, Horst Herrlich und George E. Strecker, *The Joy of Cats*; <http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/17/tr17.pdf>
- [3] Saunders MacLane, Ieke Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*
- [4] Tim Baumann, Ingo Blechschmidt, Justin Gassner, Lukas Graf, Maximilian Huber, Matthias Hutzler; *Pizzaseminar zur Kategorientheorie*; <https://pizzaseminar.speicherleck.de/skript1/pizzaseminar.pdf>